ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМУМА

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, В. М. ТИХОМИРОВ

Аннотация. В работе с общих позиций теории экстремума рассматриваются проблемы восстановления линейных функционалов на классах гладких и аналитических функций.

0. Постановка задачи о восстановлении линейных функционалов. Пусть в линейном пространстве X над $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ задано множество (класс) $C \subset X$ и линейный функционал x' на X. Будем считать, что о каждом элементе $x \in C$ мы располагаем информацией $y = Fx$, где $F\colon C \to Y$ — линейный оператор из X в другое линейное пространство Y. Задача состоит в том, чтобы восстановить наилучшим образом значение линейного функционала x' на классе C по информации, задаваемой оператором F. В это вкладывается следующий смысл. Методом восстановления будем называть любую функцию $\varphi\colon F(C) \to K$. Погрешностью такого метода называется величина

$$e(x', C, F, \varphi) = \sup_{x \in C} |\langle x', x\rangle - \varphi(Fx)|,$$

где $\langle x', x\rangle$ — значение функционала x' на элементе x. Погрешностью оптимального восстановления (x' на C по F) называется величина

$$E(x', C, F) = \inf_{\varphi} e(x', C, F, \varphi), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем функциям (методам) $\varphi\colon F(C) \to K$. Метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань в (1), называется оптимальным методом восстановления.

В работе исследуются задачи восстановления значений функций на классах Соболева $W_p^K(\mathbb{T})$ и Харди–Соболева $W^r H_p(D)$ по коэффициентам Фурье, Тейлора и значениям в других точках с общих позиций теории экстремальных задач.

1. Принцип Лагранжа для задач оптимального восстановления. Решения упомянутых задач, равно как и многих других

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №99-01-01181 и №00–15–96109), INTAS-97-1050, Research Grant 12513 of the Royal Swedish Acad. of Sci.

задач об оптимальном восстановлении линейных функционалов, базируются на связи исходной задачи (1) со следующей выпуклой экстремальной задачей:

$$\operatorname{Re}\langle x', x\rangle \to \max, \quad Fx = 0, \quad x \in C. \tag{2}$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 \operatorname{Re}\langle x', x\rangle + \operatorname{Re}\langle \lambda, Fx\rangle,$$

где $\lambda_0 \le 0$ и $\lambda \in Y'$ (Y' — алгебраически сопряженное к Y) — множители Лагранжа. Принцип Лагранжа для выпуклых задач состоит в том, что если $\widehat{x}$ — решение задачи, то найдутся множители Лагранжа (не равные нулю одновременно) такие, что функция Лагранжа достигает минимума в точке $\widehat{x}$ на множестве тех ограничений, которые в нее не включены (в данном случае на C). Этот факт является центральным утверждением следующей теоремы (см. [1]).

Теорема 1 (Принцип Лагранжа для задач восстановления). *Пусть X и Y линейные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, C — выпуклое уравновешенное подмножество X и $F\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда для того чтобы допустимая в (2) точка $\widehat{x}$ была решением этой задачи необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой множитель Лагранжа $\widehat{\lambda} \in Y'$, что*

$$\min_{x\in C} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}, -1) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}, -1). \tag{3}$$

При этом $\widehat{\lambda}$ — оптимальный метод восстановления в (1) и $E(x', C, F) = \operatorname{Re}\langle x', \widehat{x}\rangle$.

Доказательство всех приводимых ниже результатов опирается на сформулированный принцип. Используя равенство (3) как необходимое условие, мы находим соответствующие $\widehat{x}$ и $\widehat{\lambda}$, а затем, пользуясь достаточностью этого соотношения или непосредственной проверкой, убеждаемся, что $\widehat{x}$ — решение задачи (2), а $\widehat{\lambda}$ — оптимальный (причем линейный) метод восстановления.

2. Оптимальное восстановление значений функций из обобщенных соболевских классов по коэффициентам Фурье. Пусть $1 \le p \le \infty$, функция $K(\cdot) \in L_{p'}(\mathbb{T})$ ($1/p + 1/p' = 1$, $\mathbb{T}$ — окружность, реализованная как $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами) и α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $K(\cdot)$. Предположим, что $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \ne 0$ ($\beta_0 = 0$) за исключением конечного (возможно пустого) множества $Q \subset \mathbb{Z}_+$. Обозначим $\mathcal{T}_Q = \operatorname{span}\{\cos k\cdot, \sin k\cdot\}_{k\in Q}$ и положим

$$\mathcal{W}_p^K(\mathbb{T}, Q) = \Big\{\, x(\cdot) \;\Big|\; x(\cdot) = y(\cdot) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} K(\cdot - t)u(t)\,dt,\ y(\cdot) \in \mathcal{T}_Q, \\ u(\cdot) \in \mathcal{T}_Q^{\perp},\ u(\cdot) \in L_p(\mathbb{T}) \Big\},$$

где $\mathcal{T}_Q^{\perp}$ — аннулятор $\mathcal{T}_Q$.

Обобщенным соболевским классом $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$ назовем множество тех функций из $\mathcal{W}_p^K(\mathbb{T}, Q)$, для которых $\|u(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \le 1$. Если $Q = \{0\}$ и $K(\cdot) = B_r(\cdot)$, где $B_r(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{\perp r}\cos(kt - \pi r/2)$ (ядро Бернулли), то $W_p^{B_r}(\mathbb{T}, \{0\})$ совпадает с соболевским классом $W_p^r(\mathbb{T})$.

Поставим задачу о восстановлении функции $x(\cdot)$ в точке $\theta \in \mathbb{T}$ на классе $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$ по значениям ее коэффициентов Фурье $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n\perp 1}$ ($b_0 = 0$). Через Four_n обозначим отображение $x(\cdot) \mapsto (a_0, \dots, a_{n\perp 1}, b_1, \dots, b_{n\perp 1})$. Будем считать, что $Q \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$, т.к. в противном случае погрешность оптимального восстановления равна $+\infty$ и тем самым любой метод оптимален.

Теорема 2 (об оптимальном восстановлении по коэффициентам Фурье). *Пусть* $1 < p \le \infty$ *и*

$$\widehat{p}(t) = A_0/2 + \sum_{k=1}^{n\perp 1}(A_k\cos kt + B_k\sin kt)$$

— полином наилучшего приближения функции $K(\cdot)$ *подпространством* $\mathcal{T}_{n\perp 1}$ *тригонометрических полиномов в метрике* $L_{p'}(\mathbb{T})$. *Тогда метод*

$$x(\theta) \approx \widehat{\mu}_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n\perp 1}(\widehat{\mu}_k(\theta)a_k + \widehat{\nu}_k(\theta)b_k),$$

где $\widehat{\mu}_0 = 1/2$, *если* $0 \in Q$, *и* $\widehat{\mu}_0 = A_0/(2\alpha_0)$, *если* $0 \notin Q$; $\widehat{\mu}_k(\theta) = \cos k\theta$, $\widehat{\nu}_k(\theta) = \sin k\theta$, *если* $k \in Q \setminus \{0\}$, *и*

$$\widehat{\mu}_k(\theta) = \frac{(\alpha_k A_k + \beta_k B_k)\cos k\theta + (\alpha_k B_k - \beta_k A_k)\sin k\theta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

$$\widehat{\nu}_k(\theta) = \frac{(\beta_k A_k - \alpha_k B_k)\cos k\theta + (\alpha_k A_k + \beta_k B_k)\sin k\theta}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},$$

если $k \in \{1, \dots, n-1\} \setminus Q$, *является оптимальным методом восстановления* $x(\theta)$ *на* $W_p^K(\mathbb{T}, Q)$ *по коэффициентам Фурье* $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n\perp 1}$.

При этом

$$E(x(\theta), W_p^K(\mathbb{T}, Q), \mathrm{Four}_n) = \frac{1}{\pi}\|K(\cdot) - \widehat{p}(\cdot)\|_{L_{p'}(\mathbb{T})}.$$

Скажем, что функция $K(\cdot) \in L_1(\mathbb{T})$ обладает *γ-свойством Фавара* (при данном $n \in \mathbb{N}$), если найдется такой полином $\widehat{q}(\cdot) \in \mathcal{T}_{n\perp 1}$ и $\gamma \in [0, \pi/n)$, что функция $(K(t) - \widehat{q}(t))\sin n(t+\gamma)$ неотрицательна или неположительна для п.в. $t \in \mathbb{T}$. Нетрудно убедиться, что в этом случае $\widehat{q}(\cdot)$ — полином наилучшего приближения для $K(\cdot)$ в $L_1(\mathbb{T})$ и имеет место равенство

$$\|K(\cdot) - \widehat{q}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{T})} = \left|\int_{\mathbb{T}} K(t)\,\mathrm{sign}\sin n(t+\gamma)\,dt\right|.$$

Если $K(\cdot)$ непрерывно, то $\widehat{q}(\cdot)$ находится как полином, интерполирующий $K(\cdot)$ в нулях $\sin n(\cdot+\gamma)$, и тем самым из теоремы 2 определяется оптимальный метод восстановления и его погрешность.

Среди ядер, удовлетворяющих γ-свойству Фавара, выделяется класс ядер, не повышающих осцилляции.

Примером ядер такого вида может служить ядро

$$K_\beta(t)=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos mt}{\operatorname{ch} m\beta}.$$

Класс $W_\infty^{K_\beta}(\mathbb{T},\emptyset)$ совпадает с классом $h_{\infty,\beta}$, являющимся множеством вещественных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу $S_\beta=\{z\in\mathbb{C}\mid|\operatorname{Im} z|<\beta\}$ и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re} f(z)|\le 1$.

Пусть $P(D)$ — дифференциальный полином с постоянными вещественными коэффициентами степени r

$$P(D)=D^r+a_{r\perp 1}D^{r\perp 1}+\ldots+a_0,\quad D=\frac{d}{dt}.$$

Через $h_{\infty,\beta}^P$ обозначим класс вещественных 2π-периодических функций $f(\cdot)$, аналитически продолжаемых в полосу S_β и удовлетворяющих в ней условию $|\operatorname{Re}(P(D)f)(z)|\le 1$. Тогда $h_{\infty,\beta}^P=W_\infty^{K_{P,\beta}}(\mathbb{T},Q)$, где $K_{P,\beta}(\cdot)=(K_P*K_\beta)(\cdot)$,

$$K_P(t)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ P(im)\ne 0}}\frac{e^{imt}}{P(im)},\quad Q=\{\,m\in\mathbb{Z}_+:P(im)=0\,\}.$$

Положим

$$h_n(t)=\operatorname{sign}\sin nt,\quad \delta=\pi/h(P(\cdot)),$$

где $h(P(\cdot))$ — максимум мнимой части нулей полинома $P(\cdot)$.

Лемма. *Ядро $K_{P,\beta}(\cdot)$ при $n>\max\{\sup_{j\in Q}j,2\pi/\delta\}$ обладает γ-свойством Фавара для γ, определяемого из условия*

$$(K_{P,\beta}*h_n)(\gamma)=-\|(K_{P,\beta}*h_n)(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})}.$$

Эта лемма вместе с теоремой 2 позволяет выписать формулы для оптимального метода восстановления значений функций из классов $h_{\infty,\beta}^P$ по коэффициентам Фурье.

3. Восстановление значений функций на классах Харди. Пространством Харди $\mathcal{H}_p(D)$, $1\le p\le\infty$, называется множество аналитических в единичном диске $D=\{z\in\mathbb{C}\mid|z|<1\}$ функций $f(\cdot)$, для которых

$$\|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p(D)}=\begin{cases}\sup\limits_{0<r<1}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|f(re^{it})|^p\,dt\right)^{1/p}<\infty, & 1\le p<\infty,\\ \sup\limits_{z\in D}|f(z)|<\infty, & p=\infty.\end{cases}$$

Классом Харди назовем следующее множество

$$H_p(D) = \{f(\cdot) \in \mathcal{H}_p(D) \mid \|f(\cdot)\|_{\mathcal{H}_p(D)} \le 1\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $C = H_p(D)$, $\tau, z_1, \dots, z_n \in D$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$Ff(\cdot) = \left(f(z_1), \dots, f^{(k_1-1)}(z_1), \dots, f(z_n), \dots, f^{(k_n-1)}(z_n)\right).$$

Тогда метод

$$f(\tau) \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{k_j-1} \widehat{\mu}_{jk} f^{(k)}(z_j),$$

где

$$\widehat{\mu}_{jk} = \frac{B(\tau)(1-|\tau|^2)^{(p-2)/p}}{k!(k_j-k-1)!} \left(\frac{(1-\overline{z}_j z)^{k_j}}{\omega_j(z)(\tau - z)(1-\overline{\tau} z)^{(p-2)/p}} \right)^{(k_j-k-1)} \Bigg|_{z=z_j},$$

$$B(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{z - z_j}{1-\overline{z}_j z} \right)^{k_j}, \quad \omega_j(z) = \prod_{\substack{m=1\\ m\ne j}}^{n} \left(\frac{z - z_m}{1-\overline{z}_m z} \right)^{k_m},$$

является оптимальным на классе $H_p(D)$ *по информации* $Ff(\cdot)$.

При этом

$$E(f(\tau), H_p(D), F) = \frac{|B(\tau)|}{(1-|\tau|^2)^{1/p}}.$$

Следствие. *При* $p = \infty$ *и*

$$Ff(\cdot) = \mathrm{Tay}_n f(\cdot) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0))$$

$$E(f(\tau), H_\infty(D), \mathrm{Tay}_n) = \frac{|\tau|^n}{(1-|\tau|^2)^{1/p}},$$

а оптимальный метод восстановления доставляет формула

$$f(\tau) \approx \sum_{j=0}^{n-1} \tau^j (1-|\tau|^{2(n-j)}) \frac{f^{(j)}(0)}{j!}.$$

Оптимальность приведенных методов иным путем была доказана в работах [2], [3] ($p=\infty$) и [4] ($1 \le p < \infty$).

4. Восстановление значений функций на классах Харди–Соболева. Обозначим через $W^r H_\infty(D)$ класс Харди–Соболева — множество аналитических в D функций, для которых $|f^{(r)}(z)| \le 1$, $z \in D$.

Теорема 4. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in D$. Тогда метод*

$$f(\tau) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\tau^k + \sum_{k=r}^{n+r-1} \left(1 - \frac{k!}{(k-r)!}\frac{(2n+r-k)!}{(2n+2r-k)!}|\tau|^{2(n+r-k)}\right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\tau^k$$

является оптимальным на классе $W^r H_\infty(D)$ по информации $\mathrm{Tay}_{n+r} f(\cdot) = (f(0), f'(0), \dots, f^{(n+r-1)}(0))$. *При этом*

$$E(f(\tau), W^r H_\infty, \mathrm{Tay}_{n+r}) = \frac{n!}{(n+r)!}|\tau|^{n+r}.$$

5. Восстановление по значениям в равномерной сетке на окружности на классе $W^1 H_\infty(D)$.

Теорема 5. *Пусть $0 < \rho < 1$ и $\tau \in (-1, 1)$. Тогда метод*

$$f(\tau) \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{\mu}_j f(\rho e^{ij2\pi/n}),$$

где

$$\widehat{\mu}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^{n-k}(1 - q_k\alpha^n\rho^{2n}) - p_k\alpha^k\rho^{2k}(1-\alpha^n)}{1 - q_k\rho^{2n}} e^{ikj2\pi/n},$$

$$\alpha = \frac{\tau}{\rho}, \quad p_k = \frac{n-k}{n+k}, \quad q_k = \frac{k}{2n-k}p_k,$$

является оптимальным на классе $W^1 H_\infty(D)$ и для его погрешности имеет место равенство

$$E(f(\tau), W^1 H_\infty, F) = \frac{|\tau^n - \rho^n|}{n}.$$

Литература

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Москва: Эдиториал УРСС, 2000.

[2] *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки. 1972. Т. 12, №4. С. 465–476.

[3] *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19, №1. С. 29–40.

[4] *Fisher, S. D., Micchelli, C. A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. №4. P. 789–801.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова