УДК 517.51

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО ПРИБЛИЖЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ О СПЕКТРЕ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

1. Постановка задачи

Начнем с общей постановки задачи об оптимальном восстановлении. Пусть C — некоторое множество (класс) в векторном пространстве X. Про каждый элемент $x \in C$ мы располагаем информацией $I(x)$, где I — отображение (называемое *информационным*) из C в другое векторное пространство Y. Информация об элементах из C может быть задана неточно и поэтому I, вообще говоря, — многозначное отображение. Пусть, далее, Z — нормированное пространство и $\Lambda\colon X \to Z$ — линейный оператор. Задача заключается в том, чтобы восстановить (по возможности наилучшим образом) оператор Λ на классе C в метрике Z по имеющейся информации I. В это вкладывается следующий смысл. Любое отображение $\varphi\colon Y \to Z$ будем называть методом восстановления (оператора Λ на классе C по информации I). *Погрешностью* этого метода называется величина

$$e(\Lambda, C, I, \varphi) = \sup_{x\in C,\ y\in I(x)} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z.$$

Величина

$$E(\Lambda, C, I) = \inf_{\varphi\colon Y\to Z} e(\Lambda, C, I, \varphi), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon Y \to Z$, носит название *погрешности оптимального восстановления*, а метод, на котором достигается эта нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления*.

Впервые задача оптимального восстановления была поставлена С. А. Смоляком [1] для случая, когда $Z = \mathbb{R}$, I — линейный оператор и $\dim Y < \infty$. Впоследствии вся эта проблематика интенсивно развивалась в разных направлениях (см. [2]–[5]). Подход к задачам

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00-15-96109 и №02-01-00386) и программы “Университеты России” (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S.CRDF–R.F.Ministry of Education Award VZ-0100-0.

восстановления, основанный на общих принципах теории экстремума, развивался в работах [6]–[8]. Этот подход мы используем и в данной статье.

Перейдем к постановке задач восстановления, рассматриваемых в работе. Пусть S — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, S' — соответствующее пространство обобщенных функций, $F\colon S' \to S'$ — преобразование Фурье, $1 \le p \le \infty$ и $n \in \mathbb{N}$. В качестве пространства X в задаче (1) будем рассматривать пространство

$$X_p^n = \{\, x \in S' : Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}),\ x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \,\},$$

а в качестве класса C — множество

$$C_p^n = \{\, x(\cdot) \in X_p^n : \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1 \,\}.$$

Опишем информационные отображения, которые здесь изучаются. Пусть $1 \le p < \infty$, $0 < \sigma \le \infty$, $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$ и $\delta > 0$. Будем считать, что информация об элементе $x(\cdot) \in C_p^n$ состоит в том, что нам известна функция $y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma)$, такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \le \delta$. Таким образом, информационное отображение $I = I_p^{\delta,\sigma}\colon C_p^n \to L_p(\Delta_\sigma)$ таково: $I_p^{\delta,\sigma}x(\cdot) = Fx(\cdot)\big|_{\Delta_\sigma} + \delta BL_p(\Delta_\sigma)$, где $BL_p(\Delta_\sigma)$ — единичный шар в $L_p(\Delta_\sigma)$.

Если $p = \infty$, то мы рассматриваем несколько более общую ситуацию. Пусть $\delta(\cdot)$ — неотрицательная функция из $L_\infty(\Delta_\sigma)$. Будем считать, что информация об элементе $x(\cdot)$ заключается в том, что известна функция $y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma)$ такая, что $|Fx(t) - y(t)| \le \delta(t)$ для п. в. $t \in \Delta_\sigma$. Если положить

$$B(\delta(\cdot)) = \{\, y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma) : |y(t)| \le \delta(t) \text{ п. в.} \,\},$$

то информационное отображение $I = I_\infty^{\delta(\cdot),\sigma}\colon C_\infty^n \to L_\infty(\Delta_\sigma)$ в этом случае имеет вид $I_\infty^{\delta(\cdot),\sigma}x(\cdot) = Fx(\cdot)\big|_{\Delta_\sigma} + B(\delta(\cdot))$.

Ставится задача об оптимальном восстановлении линейного оператора Λ, $\Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $0 \le k \le n-1$ на классе C_p^n в метрике $L_2(\mathbb{R})$ по описанным выше информационным отображениям (далее будет показано, что $\Lambda\colon X_p^n \to L_2(\mathbb{R})$ при $2 \le p \le \infty$).

Таким образом, в нашем случае задача (1) при $p < \infty$ приобретает вид

(2)
$$E(x^{(k)}(\cdot), C_p^n, I_p^{\delta,\sigma}) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_p^n,\ y(\cdot)\in L_p(\Delta_\sigma)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем $\varphi\colon L_p(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$. Если $p=\infty$, то ее вид таков

(3)
$$E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I_\infty^{\delta(\cdot),\sigma}) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_\infty^n,\ y(\cdot)\in L_\infty(\Delta_\sigma)\\ |Fx(t)-y(t)|\le\delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем $\varphi\colon L_\infty(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$.

В задаче (2) при $p=2$ и в задаче (3) мы находим точные значения для погрешности оптимального восстановления и явные выражения для оптимальных методов восстановления. В обоих случаях наблюдается следующее явление: для фиксированной погрешности существует такое конечное $\widehat{\sigma} > 0$, что знание преобразования Фурье на интервале большем, чем $(-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma})$, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Этот вывод представляется нам важным для практических приложений полученных здесь результатов.

В задаче (2) при $p=2$ и $\sigma=\infty$ информация равносильна (в силу теоремы Планшереля) тому, что известна сама функция с точностью до δ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. В такой постановке задача решена в [9]. Периодические аналоги задачи (2) при $p=2$ и задачи (3), а также их обобщения на более широкие классы функций изучались в работе [10].

При $2<p<\infty$ получена оценка снизу величины (2). При этом доказано точное неравенство для k-ой производной функции в L_2-норме, дающее ее оценку через L_2-норму n-ой производной и L_p-норму ее преобразования Фурье.

2. Формулировки основных результатов

Теорема 1. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $0\le k\le n-1$, $0<\sigma\le\infty$, $\Delta_\sigma=(-\sigma,\sigma)$, $\delta(\cdot)\in L_\infty(\Delta_\sigma)$, $\delta(\cdot)\ge 0$ и*

$$\sigma_0 = \sup\left\{ a : 0<a<\sigma,\ \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} t^{2n}\delta^2(t)\,dt \le 1 \right\}.$$

Тогда, если $\sigma_0<\infty$, то

(4)
$$E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I_\infty^{\delta(\cdot),\sigma}) = \sqrt{\sigma_0^{-2(n-k)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (t^{2k} - \sigma_0^{-2(n-k)}t^{2n})\delta^2(t)\,dt},$$

и

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (i\tau)^k \left(1 - \left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2(n-k)}\right) y(\tau) e^{i\tau t}\,d\tau \qquad (5)$$

— оптимальный метод.

Если $\sigma_0=\infty$*, то*

$$E(x^{(k)}(\cdot),C^n_\infty,I^{\delta(\cdot),\sigma}_\infty)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k}\delta^2(t)\,dt}, \tag{6}$$

и

$$\widehat{\varphi}(y)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\tau)^k y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau \tag{7}$$

— оптимальный метод.

Следствие 1. *Пусть* $\delta(t)\equiv\delta>0$ *и*

$$\widehat{\sigma}=(\pi(2n+1))^{\frac{1}{2n+1}}\delta^{-\frac{2}{2n+1}}.$$

Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot),C^n_\infty,I^{\delta,\sigma}_\infty)=\begin{cases}\sqrt{\sigma^{-2(n-k)}+\dfrac{2\delta^2(n-k)}{\pi(2k+1)(2n+1)}\sigma^{2k+1}}, & \sigma<\widehat{\sigma},\\ \sqrt{\dfrac{2n+1}{2k+1}}\left(\dfrac{1}{\pi(2n+1)}\right)^{\frac{n-k}{2n+1}}\delta^{\frac{2(n-k)}{2n+1}}, & \sigma\ge\widehat{\sigma},\end{cases}$$

и метод (5) *при* $\sigma_0=\min(\sigma,\widehat{\sigma})$ *является оптимальным.*

Из этого следствия вытекает, что при фиксированном δ, начиная с $\widehat{\sigma}$, дальнейшее увеличение интервала, на котором известно преобразование Фурье функции из C^n_∞, заданное с погрешностью δ в равномерной метрике, не ведет к уменьшению погрешности восстановления. Другими словами, если нарушается соотношение

$$\delta^2\sigma^{2n+1}\le\pi(2n+1), \tag{8}$$

связывающее исходные данные с величиной интервала, на котором эти данные измеряются, то получаемая информация оказывается уже избыточной.

Теорема 2. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$*,* $0<k\le n-1$*,* $0<\sigma\le\infty$*,* $\delta>0$ *и*

$$\widehat{\sigma}=\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}}\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Тогда

$$E(x^{(k)}(\cdot),C^n_2,I^{\delta,\sigma}_2)=\begin{cases}\sigma^k\sqrt{\dfrac{n-k}{2\pi n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}}\delta^2+\dfrac{1}{\sigma^{2n}}}, & \sigma<\widehat{\sigma},\\ \left(\dfrac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}}, & \sigma\ge\widehat{\sigma},\end{cases}$$

и

$$\widehat{\varphi}(y)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}(i\tau)^k\left(1+\frac{n}{n-k}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}}\left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1}y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau,$$

где $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$, *— оптимальный метод.*

Если $k = 0$ *и* $0 < \sigma < \infty$, *то*

$$E(x(\cdot), C_2^n, I_2^{\delta,\sigma}) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2n}}}$$

и

$$\widehat{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\left(1 + \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{2n}\right)^{-1} y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau \tag{9}$$

— оптимальный метод.

Из теоремы 2 следует, что в задаче (2) при $p = 2$ также наблюдается эффект “насыщения”. Здесь аналогом соотношения (8) является неравенство

$$\delta^2\sigma^{2n} \le 2\pi\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{n-k}},$$

при нарушении которого имеющаяся информация оказывается избыточной.

Отметим, что метод

$$\widetilde{\varphi}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}(i\tau)^k y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau,$$

сопоставляющий функции $y(\cdot)$ k-ую производную ее обратного преобразования Фурье, при $k = 0$ также оптимален (наряду с методом (9)) в задаче восстановления из теоремы 2. Это легко установить непосредственной оценкой. Однако можно показать, что при $k > 0$ этот, на первый взгляд, естественный метод уже не оптимален и, более того, его погрешность равна ∞.

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n-1$ *и* $2 \le p \le \infty$. *Имеет место точное неравенство*

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le K(k,n,p)\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}}\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{k+1/2-1/p}{n+1/2-1/p}}, \tag{10}$$

где при $2 < p < \infty$

$$K(k,n,p) = \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\left(\frac{\sqrt{k+1/2-1/p}\,B^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{1/p}(n-k)^{1-1/p}}\right)^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}},$$

$$B = B\left(\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}, 2\frac{1-1/p}{1-2/p}\right) \tag{11}$$

и $B(\cdot,\cdot)$ *—* B*-функция Эйлера;*

(12)

$$K(k,n,\infty) = \sqrt{\frac{2n+1}{2k+1}}\left(\frac{1}{\pi(2n+1)}\right)^{\frac{n-k}{2n+1}}, \quad K(k,n,2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}}.$$

При $p = 2$ неравенство (10) (в силу теоремы Планшереля) совпадает с известным неравенством Харди–Литтлвуда–Полиа. Неравенства вида (10) с разными метриками, где вместо преобразования Фурье функции стоит сама функция, обычно называют неравенствами для производных колмогоровского типа. Они играют важную роль в различных вопросах анализа и теорию приближений. Им посвящена большая литература (см., например, [11, 12]).

3. Доказательства

Начнем с одного простого утверждения, касающегося оценки снизу погрешности оптимального восстановления.

Лемма 1. *Пусть в задаче* (1) *множество*

$$\operatorname{gr} I = \{\, (x,y) \in X \times Y : x \in C,\ y \in I(x)\,\}$$

центрально-симметрично, а множество

$$I^{-1}(0) = \{x \in C : 0 \in I(x)\}$$

не пусто. Тогда

$$E(\Lambda, C, I) \geq \sup_{x \in C,\ x \in I^{-1}(0)} \|\Lambda x\|_Z.$$

Доказательство. Для любого метода φ при всех $x \in C$ таких, что $x \in I^{-1}(0)$, имеем

$$2\|\Lambda x\|_Z \leq \|\Lambda x - \varphi(0)\|_Z + \|\Lambda(-x) - \varphi(0)\|_Z \leq 2e(\Lambda, C, I, \varphi).$$

Следовательно, для любого метода φ

$$e(\Lambda, C, I, \varphi) \geq \sup_{x \in C,\ x \in I^{-1}(0)} \|\Lambda x\|_Z,$$

откуда сразу же вытекает доказываемая оценка. □

Доказательства теорем 1 и 2 проводятся по единой схеме. По этой причине мы сначала доказываем один общий результат (содержащий в себе соображения, связанные с подходом, основанным на принципах выпуклой оптимизации), а затем, опираясь на него, получаем упомянутые теоремы. Задача восстановления, относительно которой формулируется данный результат, является некоторой детализацией общей постановки, приведенной в начале статьи.

Пусть T — конечное множество с дискретной мерой или интервал прямой (конечный или бесконечный) с мерой Лебега, X, Y_t, $t \in T$, — векторные пространства с полускалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_X$, $(\cdot,\cdot)_{Y_t}$ и соответствующими полунормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_{Y_t}$, Z — нормированное пространство и $\delta(\cdot)$ — неотрицательная измеримая функция на T. Предположим, что Y — некоторое подпространство функций $y(\cdot)$ на T со значениями в $\cup_{t\in T} Y_t$, таких, что

$y(t) \in Y_t$ и $t \to \|y(t)\|_{Y_t}$ — измеримая функция на T. Рассматривается задача оптимального восстановления оператора $\Lambda\colon X \to Z$ на классе $BX = \{x \in X : \|x\|_X \le 1\}$ по информации о линейном операторе $I\colon X \to Y$, заданном с погрешностью $\delta(\cdot)$. Точнее говоря, для каждого $x \in BX$ известна функция $y(\cdot) \in Y$ такая, что для п. в. $t \in T$

$$\|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t} \le \delta(t).$$

Погрешность оптимального восстановления записывается в этом случае в виде

$$E(\Lambda, BX, I, \delta(\cdot)) = \inf_{\varphi\colon Y \to Z} \sup_{\substack{x \in BX,\ y(\cdot) \in Y \\ \|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t} \le \delta(t) \text{ п. в.}}} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z. \tag{13}$$

Нас интересует значение этой величины и оптимальный метод.

Из леммы 1 следует, что

$$E(\Lambda, BX, I, \delta(\cdot)) \ge \sup_{\substack{x \in BX \\ \|Ix(t)\|_{Y_t} \le \delta(t) \text{ п. в.}}} \|\Lambda x\|_Z. \tag{14}$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу (значение которой совпадает с квадратом величины, стоящей в правой части (14)):

$$\|\Lambda x\|_Z^2 \to \max, \quad \|Ix(t)\|_{Y_t}^2 \le \delta^2(t) \text{ для п. в. } t \in T, \quad \|x\|_X^2 \le 1. \tag{15}$$

Положим

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = -\|\Lambda x\|_Z^2 + \int_T \lambda_1(t)\|Ix(t)\|_{Y_t}^2\, d\mu + \lambda_2\|x\|_X^2,$$

где $\lambda_1(\cdot)$ — измеримая неотрицательная функция, $\lambda_2 \ge 0$, а $d\mu$ — мера Лебега, если T — интервал прямой и дискретная мера, если T — конечное множество.

Теорема 4. *Пусть существуют измеримая неотрицательная функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$ и $\widehat{\lambda}_2 \ge 0$ такие, что функция $\widehat{\lambda}_1(\cdot)\delta^2(\cdot)$ и функции $t \to \widehat{\lambda}_1(t)(y^1(t), y^2(t))_{Y_t}$ при всех $y^1(\cdot), y^2(\cdot) \in Y$ суммируемы на T и*

(a) $\mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) \ge 0 \quad \forall x \in X.$

Пусть, кроме того, существует такая последовательность $\{x_m\}$ допустимых элементов в (15), что выполнены условия:

(b) $\lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{L}(x_m, \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = 0,$

(c) $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\int_T \widehat{\lambda}_1(t) \left(\|Ix_m(t)\|_{Y_t}^2 - \delta^2(t)\right) d\mu + \widehat{\lambda}_2 \left(\|x_m\|_X^2 - 1\right) \right) = 0.$

Тогда, если x_y — решение экстремальной задачи

$$\int_T \widehat{\lambda}_1(t)\|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t}^2\, d\mu + \widehat{\lambda}_2\|x\|_X^2 \to \min, \quad x \in X, \tag{16}$$

то

(17)
$$\varphi(y) = \Lambda x_y$$

— оптимальный метод восстановления и

(18)
$$E(\Lambda, BX, I, \delta(\cdot)) = \sup_{\substack{x\in BX \\ \|Ix(t)\|_{Y_t}\le\delta(t) \text{ п. в.}}} \|\Lambda x\|_Z = \sqrt{\int_T \widehat{\lambda}_1(t)\delta^2(t)\,d\mu + \widehat{\lambda}_2}.$$

Доказательство. 1. Покажем, что значения задачи (15) и задачи

(19)
$$\|\Lambda x\|_Z^2 \to \max, \quad \int_T \widehat{\lambda}_1(t)\|Ix(t)\|_{Y_t}^2\,d\mu + \widehat{\lambda}_2\|x\|_X^2 \le S,$$

где
$$S = \int_T \widehat{\lambda}_1(t)\delta^2(t)\,d\mu + \widehat{\lambda}_2,$$

совпадают и равны S. Действительно, для любого допустимого в (15) элемента $x \in X$ имеем с учетом (a)

$$-\|\Lambda x\|_Z^2 \ge -\|\Lambda x\|_Z^2 + \int_T \widehat{\lambda}_1(t)\left(\|Ix(t)\|_{Y_t}^2 - \delta^2(t)\right)\,d\mu + \widehat{\lambda}_2\left(\|x\|_X^2 - 1\right) \ge -S.$$

С другой стороны, используя последовательно (c) и (b), получаем, что

$$-\lim_{m\to\infty}\|\Lambda x_m\|^2 = \lim_{m\to\infty}\Bigg(-\|\Lambda x_m\|_Z^2 + \int_T \widehat{\lambda}_1(t)\left(\|Ix_m(t)\|_{Y_t}^2 - \delta^2(t)\right)\,d\mu + \widehat{\lambda}_2\left(\|x_m\|_X^2 - 1\right)\Bigg) = -S,$$

т. е. S — значение задачи (15). Но, очевидно, эти же рассуждения доказывают, что S и значение задачи (19).

2. Оценка сверху. Рассмотрим векторное пространство $H = X \times Y$ с полускалярным произведением

$$((x^1, y^1(\cdot)), (x^2, y^2(\cdot)))_H = \int_T \widehat{\lambda}_1(t)(y^1(t), y^2(t))_{Y_t}\,d\mu + \widehat{\lambda}_2(x^1, x^2)_X.$$

Тогда экстремальная задача (16) может быть переписана в виде

$$\|(x, Ix(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2 \to \min, \quad x \in X.$$

Если x_y — решение этой задачи, то легко показать, что для всех $x \in X$ выполняется равенство

$$((x_y, Ix_y(\cdot)) - (0, y(\cdot)), (x, Ix(\cdot)))_H = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|(x, Ix(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2 = \|(x, Ix(\cdot)) - (x_y, Ix_y(\cdot))\|_H^2 + \|(x_y, Ix_y(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2.$$

Если $\|x\|_X \le 1$ и $\|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t} \le \delta(t)$, $t \in T$, то из последнего неравенства вытекает, что

$$\|(x, Ix(\cdot)) - (x_y, Ix_y(\cdot))\|_H^2 \le \|(x, Ix(\cdot)) - (0, y(\cdot))\|_H^2 \\ = \int_T \widehat{\lambda}_1(t)\|Ix(t) - y(t)\|_{Y_t}^2\, d\mu + \widehat{\lambda}_2\|x\|_X^2 \le S.$$

Полагая $z = x - x_y$, приходим к неравенству

$$\int_T \widehat{\lambda}_1(t)\|Iz(t)\|_{Y_t}^2\, d\mu + \widehat{\lambda}_2\|z\|_X^2 \le S$$

и значит,

$$\|\Lambda x - \Lambda x_y\|_Z = \|\Lambda z\|_Z \le \sup_{\int_T \widehat{\lambda}_1(t)\|Ix_t\|_{Y_t}^2\, d\mu + \widehat{\lambda}_2\|x\|_X^2 \le S} \|\Lambda x\|_Z = \sqrt{S}.$$

Учитывая (14), получаем равенство (18) и оптимальность метода (17). $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $\sigma_0 < \infty$. Запишем рассматриваемую задачу в терминах теоремы 4. Здесь $T = \Delta_\sigma$, $X = X_\infty^n$ — векторное пространство с полускалярным произведением

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot))_{X_\infty^n} = \int_{\mathbb{R}} x_1^{(n)}(t)\overline{x_2^{(n)}(t)}\, dt,$$

$Y_t = \mathbb{C}$ при всех $t \in \Delta_\sigma$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, $Y = L_\infty(\Delta_\sigma)$, $\Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $BX = C_\infty^n$ и оператор $I\colon X_\infty^n \to L_\infty(\Delta_\sigma)$ определен равенством $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)$. При таких обозначениях задача (3) совпадает с задачей (13). Функция $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2)$ из теоремы 4 имеет в этом случае вид

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = -\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \int_{\Delta_\sigma} \lambda_1(t)|Fx(t)|^2\, dt \\ + \lambda_2\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2 = u(\cdot)$, получим (в силу теоремы Планшереля)

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(-t^{2k} + \lambda_2 t^{2n}\right) u(t)\, dt + 2\pi\int_{\Delta_\sigma} \lambda_1(t)u(t)\, dt.$$

Положим $\widehat{\lambda}_2 = \sigma_0^{-2(n-k)}$ и

$$\widehat{\lambda}_1(t) = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\left(t^{2k} - \widehat{\lambda}_2 t^{2n}\right), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \ge \sigma_0. \end{cases}$$

Тогда при всех $x(\cdot) \in X_\infty^n$

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = \int_{|t|\ge\sigma_0} \left(-t^{2k} + \sigma_0 t^{2n}\right) u(t)\, dt \ge 0.$$

Положим
$$\gamma = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} t^{2n}\delta^2(t)\,dt.$$
Если $\gamma = 0$, то обозначив через $\widehat{x}(\cdot)$ обратное преобразование Фурье функции, совпадающей с $\delta(\cdot)$ в интервале $(-\sigma_0, \sigma_0)$ и равной нулю вне него, легко проверить, что условия (b) и (c) теоремы 4 выполнены для постоянной последовательности $x_m(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$.

Если $\gamma > 0$ (в этом случае, очевидно, $\sigma_0 = \sigma$), то положим для $m > \gamma^{-2}$
$$u_m(t) = \begin{cases} \delta^2(t)/(2\pi), & |t| < \sigma, \\ \sigma^{-2n}(m\gamma - \sqrt{m})/2, & \sigma \le |t| \le \sigma + 1/m, \\ 0, & |t| > \sigma + 1/m \end{cases}$$
(через $x_m(\cdot)$ будем обозначать обратные преобразования Фурье функций $\sqrt{2\pi u_m(\cdot)}$). Нетрудно убедиться, что
$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{L}(x_m(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) = 0.$$
Кроме того,
$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\lambda}_1(t)(2\pi u_m(t) - \delta^2(t))\,dt = 0$$
и
$$\begin{aligned} \|x_m^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} t^{2n} u_m(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2n}\delta^2(t)\,dt + \frac{m\gamma - \sqrt{m}}{\sigma^{2n}}\int_{\sigma}^{\sigma+1/m} t^{2n}\,dt \\ &= 1 - \gamma + \frac{(m\gamma - \sqrt{m})\left((\sigma + 1/m)^{2n+1} - \sigma^{2n+1}\right)}{\sigma^{2n}(2n+1)} \overset{m\to\infty}{\to} 1. \end{aligned}$$
Из последних равенств следует также, что при достаточно больших m
$$\|x_m^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} < 1 - \frac{1}{2\sqrt{m}},$$
т. е. функции $x_m(\cdot)$ являются допустимыми в задаче (15).

Задача (16) для $y(\cdot) \in L_\infty(\Delta_\sigma)$ имеет вид
$$\int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_1(t)|Fx(t) - y(t)|^2\,dt + \widehat{\lambda}_2\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \min, \quad x(\cdot) \in X^n_\infty.$$
С учетом теоремы Планшереля она может быть записана так
$$\int_{\Delta_\sigma} \widehat{\lambda}_1(t)|Fx(t) - y(t)|^2\,dt + \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2n}|Fx(t)|^2\,dt \to \min, \quad x(\cdot) \in X^n_\infty.$$

Нетрудно проверить, что ее решением является функция $\widehat{x}_y(\cdot)$ такая, что

$$F\widehat{x}_y(t) = \begin{cases} \dfrac{2\pi\widehat{\lambda}_1(t)}{2\pi\widehat{\lambda}_1(t) + \widehat{\lambda}_2 t^{2n}} y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

т. е.

$$F\widehat{x}_y(t) = \begin{cases} \left(1 - \sigma_0^{-2(n-k)} t^{2(n-k)}\right) y(t), & |t| < \sigma_0, \\ 0, & |t| \geq \sigma_0. \end{cases}$$

Из теоремы 4 вытекает, что оптимальный метод имеет вид (5), а для его погрешности справедлива формула (4).

Если $\sigma_0 = \infty$ (при этом очевидно $\sigma = \infty$), то из леммы 1, обозначив через $\widehat{x}(\cdot)$ обратное преобразование функции $\delta(\cdot)$, будем иметь

$$E(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I^{\delta(\cdot),\infty}) \geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_\infty^n \\ |Fx(t)|\leq\delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$\geq \|\widehat{x}^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}\delta^2(t)\,dt}.$$

С другой стороны, для метода (7) имеем

$$e(x^{(k)}(\cdot), C_\infty^n, I^{\delta(\cdot),\infty}, \widehat{\varphi}) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_\infty^n,\ y(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}) \\ |Fx(t)-y(t)|\leq\delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{\varphi}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$= \sup_{\substack{x(\cdot)\in C_\infty^n,\ y(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}) \\ |Fx(t)-y(t)|\leq\delta(t) \text{ п. в.}}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}|Fx(t) - y(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t^{2k}\delta^2(t)\,dt}.$$

□

Из теоремы 1, в частности, вытекает, что если $\delta(t) \equiv \delta > 0$ и $\sigma = \infty$ (см. следствие 1), то

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in C_\infty^n \\ |Fx(t)|\leq\delta(t) \text{ п. в.}}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = K(k, n, \infty)\delta^{\frac{2(n-k)}{2n+1}},$$

где константа $K(k, n, \infty)$ определена равенствами (12). Отсюда следует точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq K(k, n, \infty)\|Fx(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{\frac{2(n-k)}{2n+1}}\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{\frac{2k+1}{2n+1}}.$$

Доказательство теоремы 2. Снова запишем рассматриваемую задачу в терминах теоремы 4. Здесь T состоит из одной точки, скажем, $t = 1$. Далее $X = X_2^n$ — векторное пространство с полускалярным произведением

$$(x_1(\cdot), x_2(\cdot))_{X_2^n} = \int_{\mathbb{R}} x_1^{(n)}(t)\overline{x_2^{(n)}(t)}\, dt,$$

$Y_1 = Y = L_2(\Delta_\sigma)$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, $\Lambda x(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, $BX = C_2^n$, информационный оператор $I\colon X_2^n \to L_2(\Delta_\sigma)$ определен равенством $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)$ и $\delta(1) = \delta > 0$. Функция $\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2)$ из теоремы 4 имеет здесь вид

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \lambda_1 \int_{\Delta_\sigma} |Fx(t)|^2\, dt + \lambda_2 \|x^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Переходя к образам Фурье и обозначая $(2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2 = u(\cdot)$, получим

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(-t^{2k} + 2\pi\lambda_1\chi_\sigma(t) + \lambda_2 t^{2n}\right) u(t)\, dt,$$

где $\chi_\sigma(\cdot)$ — характеристическая функция интервала Δ_σ.

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \dfrac{n-k}{n}\sigma_0^{2k}, & k > 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}, & k = 0, \end{cases} \qquad \widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \sigma_0^{-2(n-k)}, & k > 0, \\ \sigma^{-2n}, & k = 0, \end{cases}$$

$$\widehat{t} = \begin{cases} \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2(n-k)}} \sigma_0, & k > 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при всех $x(\cdot) \in X_2^n$

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Предположим сначала, что $k > 0$ и $\sigma < \widehat{\sigma}$ (в этом случае $\sigma_0 = \sigma$). Рассмотрим для достаточно больших m последовательность функций

$$u_m(t) = \begin{cases} m\dfrac{\delta^2}{4\pi}, & \widehat{t} \leq |t| \leq \widehat{t} + 1/m, \\ \dfrac{m - \sqrt{m}}{2\sigma^{2n}} \left(1 - \dfrac{\delta^2}{2\pi}\widehat{t}^{2n}\right), & \sigma \leq |t| \leq \sigma + 1/m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$2\pi \int_{\Delta_\sigma} u_m(t)\, dt = \delta^2,$$

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2n} u_m(t)\,dt = \frac{m\delta^2}{2\pi}\frac{(\widehat{t}+1/m)^{2n+1}-\widehat{t}^{2n+1}}{2n+1} + \frac{m-\sqrt{m}}{2\sigma^{2n}}\left(1-\frac{\delta^2}{2\pi}\widehat{t}^{2n}\right)\frac{(\sigma+1/m)^{2n+1}-\sigma^{2n+1}}{2n+1} \overset{m\to\infty}{\to} 1.$$

Кроме того, при достаточно больших m

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2n} u_m(t)\,dt < 1-\left(1-\frac{\delta^2}{2\pi}\widehat{t}^{2n}\right)\frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Отсюда следует, что для функций $x_m(\cdot)$, являющихся обратным преобразованием Фурье функций $\sqrt{2\pi u_m(\cdot)}$, условие (c) теоремы 4 выполнено. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие (b) той же теоремы также выполнено.

Если $k>0$ и $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ или $k=0$, то следует рассмотреть функции

$$u_m(t) = \begin{cases} (m-\sqrt{m})\delta^2/(4\pi), & \widehat{t} \leq |t| \leq \widehat{t}+1/m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача (16) для $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ имеет вид

$$\widehat{\lambda}_1 \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|^2_{L_2(\Delta_\sigma)} + \widehat{\lambda}_2\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \to \min, \quad x(\cdot)\in X_2^n.$$

С учетом теоремы Планшереля она может быть записана в виде

$$\widehat{\lambda}_1 \int_{\Delta_\sigma} |Fx(t)-y(t)|^2\,dt + \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} t^{2n}|Fx(t)|^2\,dt \to \min, \quad x(\cdot)\in X_2^n.$$

Решением этой задачи является функция $\widehat{x}_y(\cdot)$ такая, что при $k>0$

$$F\widehat{x}_y(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{n}{n-k}\left(\dfrac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}}\left(\dfrac{t}{\sigma_0}\right)^{2n}\right)^{-1} y(t), & |t|<\sigma, \\ 0, & |t|\geq\sigma, \end{cases}$$

а при $k=0$ —

$$F\widehat{x}_y(t) = \begin{cases} \left(1+\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{2n}\right)^{-1} y(t), & |t|<\sigma, \\ 0, & |t|\geq\sigma. \end{cases}$$

Теперь доказываемая теорема вытекает из теоремы 4. $\square$

Из теоремы 2 вытекает, что

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in C_2^n \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}},$$

откуда следует точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}} \|Fx(\cdot)\|^{\frac{n-k}{n}}_{L_2(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\frac{k}{n}}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Доказательство теоремы 3. Случаи $p=\infty,2$ вытекают из теорем 1, 2. Будем считать, что $2<p<\infty$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\to\max,\quad \|Fx(\cdot)\|^2_{L_p(\mathbb{R})}\le\delta^2,\quad \|x^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\le 1.$$

В образах Фурье, обозначив через $u(\cdot)=(2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2$, эту задачу можно переписать в виде

$$(20)\qquad \int_{\mathbb{R}}t^{2k}u(t)\,dt\to\max,\quad \int_{\mathbb{R}}u^{p/2}(t)\,dt\le\frac{\delta^p}{2\pi},$$
$$\int_{\mathbb{R}}t^{2n}u(t)\,dt\le 1,\ \ u(t)\ge 0.$$

Свяжем с задачей (20) следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(u(\cdot),\lambda_1,\lambda_2)=\int_{\mathbb{R}}(-t^{2k}u(t)+\lambda_1u^{p/2}(t)+\lambda_2t^{2n}u(t))\,dt.$$

Если мы найдем такую допустимую в (20) функция $\widehat{u}(\cdot)$ и такие множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2\ge 0$, что

$$(a)\quad \min_{u(t)\ge 0}\mathcal{L}(u(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)=\mathcal{L}(\widehat{u}(\cdot),\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2),$$
$$(b)\quad \widehat{\lambda}_1\left(\int_{\mathbb{R}}u(t)^{p/2}\,dt-\frac{\delta^p}{2\pi}\right)=0,$$
$$(c)\quad \widehat{\lambda}_2\left(\int_{\mathbb{R}}t^{2n}u(t)\,dt-1\right)=0,$$

то $\widehat{u}(\cdot)$ — решение задачи (20). Действительно, для любой допустимой функции $u(\cdot)$ имеем

$$-\int_{\mathbb{R}}t^{2k}u(t)\,dt\ge-\int_{\mathbb{R}}t^{2k}u(t)\,dt+\widehat{\lambda}_1\left(\int_{\mathbb{R}}u(t)^{p/2}\,dt-\frac{\delta^p}{2\pi}\right)$$
$$+\widehat{\lambda}_2\left(\int_{\mathbb{R}}t^{2n}u(t)\,dt-1\right)\ge-\int_{\mathbb{R}}t^{2k}\widehat{u}(t)\,dt+\widehat{\lambda}_1\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)^{p/2}\,dt-\frac{\delta^p}{2\pi}\right)$$
$$+\widehat{\lambda}_2\left(\int_{\mathbb{R}}t^{2n}\widehat{u}(t)\,dt-1\right)=-\int_{\mathbb{R}}t^{2k}\widehat{u}(t)\,dt.$$

Положим $\widehat{\lambda}_2=\sigma^{-2(n-k)}$, где параметр $\sigma>0$ определим позже. Тогда для всех $u(t)\ge 0$ и любого $\widehat{\lambda}_1>0$

$$-t^{2k}u(t)+\lambda_1u^{p/2}(t)+\frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}u(t)\ge-t^{2k}\widehat{u}(t)+\lambda_1\widehat{u}^{p/2}(t)+\frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\widehat{u}(t),$$

где

$$\widehat{u}(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\left(t^{2k}-\dfrac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)\right)^{\frac{1}{p/2-1}}, & |t|\le\sigma,\\ 0, & |t|>\sigma.\end{cases}$$

Тем самым выполнено условие (a). Выберем σ и $\widehat{\lambda}_1$ так, чтобы удовлетворить условиям (b) и (c):

$$\left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}} dt = \frac{\delta^p}{2\pi},$$

$$\left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} \int_{-\sigma}^{\sigma} t^{2n} \left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} dt = 1.$$

Сделав замену $t = \sigma y$ и выразив полученные интегралы через значение бета-функции B, определенное равенством (11), получим

$$\sigma^{\frac{pk}{p/2-1}+1} \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}} \frac{B}{n-k} = \frac{\delta^p}{2\pi},$$

$$\sigma^{\frac{2k}{p/2-1}+2n+1} \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} \frac{(k+1/2-1/p)B}{(n-k)^2} = 1.$$

Отсюда

$$\left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}} = \frac{(n-k)^2}{(k+1/2-1/p)B}\sigma^{-\frac{2k}{p/2-1}-2n-1} \tag{21}$$

и

$$\sigma = \left(\frac{(2\pi)^{1/p}(n-k)^{1-1/p}}{\delta(k+1/2-1/p)^{1/2}B^{1/2-1/p}}\right)^{\frac{1}{n+1/2-1/p}}. \tag{22}$$

Учитывая (21), будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2k}\widehat{u}(t)\,dt = \frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}\sigma^{-2(n-k)}.$$

Подставив значение σ из (22), получим, что при всех $2 < p < \infty$

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in F_p^n \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = K\delta^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}}.$$

Из этого равенства непосредственно вытекает доказываемое точное неравенство для производных. □

Литература

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс., МГУ, М., 1965.

[2] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press, New York, 1977, pp. 1–54.

[3] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. Academic Press, New York, 1980.

[4] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Math., Vol. 1129, Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 21–93.

[5] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York, 2000.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа. Матем. сб., **188**. №12. 73–106 (1997).

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Эдиториал УРСС, М., 2000.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* Оптимальное восстановление и теория экстремума. Докл. РАН., **379**. №2. 161–164 (2001).

[9] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal., **16**. 87–105 (1979).

[10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. Матем. сб., **193**. №3. 79–100 (2002).

[11] *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных. В кн.: Избранные труды А. Н. Колмогорова. Математика и механика. Наука, М., 1985, с. 386–390.

[12] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи. УМН, **51**. №6. 89–124 (1996).

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского