Н.Д.Выск, К.Ю. Осипенко

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

учебное пособие

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского
Кафедра «Высшая математика»
2011

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания

Начинайте каждое занятие с изучения лекции. При этом:

- вначале внимательно прочтите определения и осознайте смысл используемых терминов
- затем прочтите формулировки теорем, которые задают свойства изучаемых объектов
- разберите доказательства теорем и выводы формул
- в завершение работы прочтите всю лекцию еще раз, чтобы убедиться, что теоретический материал освоен.

Следующий этап работы – выполнение заданий практикума.

- каждую задачу попробуйте решить самостоятельно
- в случае неудачи посмотрите указание и вновь повторите попытку
- в случае повторной неудачи внимательно разберите приведенное решение
- если вы решили задачу самостоятельно (во всяком случае, ваш ответ оказался верным), все равно обязательно прочтите решение, данное в учебном курсе – это поможет вам проверить правильность примененного метода решения
- закончив решение всех задач практикума, обязательно вернитесь к тем из них, которые не получились в первый раз, и попробуйте вновь самостоятельно решить их.

При выполнении домашнего задания используйте материал лекции и практикума.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. МАТРИЦЫ

1.1.1. *Матрицы. Операции над матрицами*

Определение матрицы
1.

Матрицей А размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$
называется таблица из $m\cdot n$ чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Часто для краткости пишут $A = \|a_{ij}\|$. Числа, из которых состоит матрица, называются *элементами матрицы*. Индексы у элементов матрицы указывают расположение этого элемента в таблице: первый индекс – номер строки, в которой находится элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент a_{23} находится на пересечении второй строки и третьего столбца:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\boxed{a_{23}}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}, … называются *главной диагональю* матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a_{22}\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{33}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Если матрица А имеет размер $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$, то такую матрицу называют *квадратной матрицей порядка n*.

Две матрицы одинакового размера $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ называют *равными* (при этом пишут $A = B$), если

$$a_{ij} = b_{ij};\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n.$$

Упражнение 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти a_{12} и a_{23}.

Решение.
Элемент a_{12} располагается в первой строке и втором столбце, то есть это второй элемент первой строки: a_{12} = -1.
Соответственно a_{23} – элемент, стоящий во второй строке и в третьем столбце; a_{23} = -3.

Упражнение 2.
Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

При каких □ и □ A=B?

Решение.
У равных матриц должны быть равными соответствующие элементы. Для элементов, заданных численно, это условие выполняется: $a_{12} = b_{12} = 1$, $a_{22} = b_{22} = 3$. Поскольку $b_{11} = 4$, а $a_{21} = -2$, для равенства матриц A и B должны выполняться условия:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Следовательно, □ = ±2, □ = -2.

Ответ: □ = ±2, □ = -2.

Сумма матриц

Суммой двух матриц одинакового размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ называют матрицу $C = \|c_{ij}\|$ размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ такую, что
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

Пример 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow C=A+B=\begin{pmatrix}1-2 & 2+3\\ 3+1 & -1-3\\ 4+0 & 5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -4\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.
Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 7\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти $A+B$.

Решение.
По определению суммы матриц матрица $C = A + B$ имеет размер 2×3, и ее элементы являются суммами соответствующих элементов матриц A и B:

$c_{11}=a_{11}+b_{11}=1-3=-2;\ c_{12}=a_{12}+b_{12}=-3+2=-1;\ c_{13}=a_{13}+b_{13}=2+1=3;$

$c_{21}=a_{21}+b_{21}=5+4=9;\ c_{22}=a_{22}+b_{22}=-4+1=-3;\ c_{23}=a_{23}+b_{23}=7+2=9.$

Следовательно, матрица $C = A + B$ имеет вид:

$$C=A+B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 9 & -3 & 9\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A+B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 9 & -3 & 9\end{pmatrix}.$

Не забывайте, что складывать можно только матрицы одинакового размера!

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю. Легко проверить, что выполнены следующие свойства для операции сложения матриц:

1. *A+B=B+A (коммутативность),*
2. *(A+B)+C=A+(B+C) (ассоциативность),*
3. *A*+0=*A*.

Произведением матрицы размера $m5n$ $A = \|a_{ij}\|$ на число □ называют матрицу того же размера $C = \|c_{ij}\|$ такую, что

$$c_{ij} = l\,a_{ij}, \; i = 1,\dots,m;\; j = 1,\dots,n.$$

Упражнение 4.
Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу C= -3A.

Решение.
Из определения произведения матрицы на число следует, что размер матрицы C совпадает с размером матрицы A (2×3), а каждый элемент матрицы C равен соответствующему элементу матрицы A, умноженному на -3:

$$c_{11} = -3a_{11} = -3\cdot1 = -3;\; c_{12} = -3a_{12} = -3\cdot7 = 21;$$

$$c_{13} = -3a_{13} = -3\cdot(-3) = 9;$$

$$c_{21} = -3a_{21} = -3\cdot2 = -6;\; c_{22} = -3a_{22} = -3\cdot4 = -12;$$

$$c_{23} = -3a_{23} = -3\cdot6 = -18.$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -3 & -21 & 9 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}.$

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие свойства:

1. □ (A+B)= □A+□B,
2. (□+□)A=□A+□A,
3. (□)A=□ (□A).

Разностью матриц одинакового размера A и B называется матрица A-B=A+(-1)B.

Знак суммы

Нам часто придется иметь дело с различными суммами. Удобно иметь обозначение для сумм, позволяющее записывать их более коротким способом. Этому служит знак суммирования

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

Из хорошо известных свойств чисел вытекают следующие свойства знака суммирования:

1. $$\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j$$
2. $$\sum_{j=1}^{n} l\,a_j = l\sum_{j=1}^{n} a_j$$
3. $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Произведение матриц

Умножение матрицы $A = \|a_{ij}\|$ размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ на матрицу $B = \|b_{ij}\|$ размера $\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{k}$ определено лишь для случая, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, т.е. когда n=l. В этом случае произведение матриц определяется следующим образом:

Произведением матриц AB называется матрица $C = \|c_{ij}\|$ размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{k}$, у которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

$$i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n$$

Иначе говоря, элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующий элемент j-ого столбца матрицы B. С помощью знака суммирования можно записать это так:

$$c_{ij}=\sum_{S=1}^{n} a_{is}b_{sj},\quad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,k.$$

Пример 2.
Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$AB=\begin{pmatrix}2\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot(-3)+3\cdot 1 & 2\cdot 4+3\cdot 0\\ -1\cdot 2+4\cdot 3 & -1(-3)+4\cdot 1 & -1\cdot 4+4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -3 & 8\\ 10 & 7 & -4\end{pmatrix}.$$

Отметим, что произведение матриц некоммутативно, т.е. в общем случае AB не равно BA. В приведённом выше примере матрицу B просто нельзя даже умножить на матрицу A. Но, даже если A и B – квадратные матрицы одного порядка (тогда существуют произведения AB и BA), то, как показывает следующий пример, произведения AB и BA могут не совпадать.

Пример 3.
Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.
Тогда $AB=\begin{pmatrix}2\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot 0+1\cdot 3\\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 0+(-1)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$,

$$BA=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot(-1)\\ -2\cdot 2+3\cdot 0 & -2\cdot 1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -5\end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Упражнение 5.
Доказать, что для любой квадратной матрицы A

$$AE=EA=A,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и A.

Доказательство.
Пусть A и E – квадратные матрицы n-го порядка, $B = AE$.

Тогда $b_{ij} = a_{i1}e_{1j} + a_{i2}e_{2j} + \ldots + a_{ij}e_{jj} + \ldots + a_{in}e_{nj}$.
Но $e_{ij} = 0$ при i, не равном j, а $e_{jj} = 1$. Следовательно, $b_{ij} = a_{ij}\cdot 1 = a_{ij}$. Таким образом, все элементы матрицы B равны соответствующим элементам матрицы A, то есть $B = A$.
Если матрица $C = EA$, то $c_{ij} = e_{i1}a_{1j} + e_{i2}a_{2j} + \ldots + e_{ii}a_{ij} + \ldots + e_{in}a_{nj} = 1\cdot a_{ij} = a_{ij}$ (учитываем, что $e_{ii} = 1$, $e_{ij} = 0$ при i, не равном j). Значит, $C = A$. Утверждение доказано.

Приведём ряд свойств произведений матриц.

1. $(AB)C=A(BC)$

Доказательство.
Пусть размер матрицы $A = \|a_{ij}\|$ $m\times p$, матрицы $B = \|b_{ij}\|$ - $p\times n$, а матрицы $C = \|c_{ij}\|$ $n\times k$. Имеем $AB = \|□_{ij}\|$, где

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj}, \quad i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n.$$

Тогда $(AB)C = \|□_{ij}\|$, где

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}c_{rj} = \sum_{r=1}^{n}(\sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sr})c_{rj} = \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj},$$

где $b_{sj} = \sum_{r=1}^{n} b_{sr}c_{ri}$ - элемент матрицы BC. Тем самым, если обозначить элемент матрицы $A(BC)$ через □'$_{ij}$, будем иметь

$$g_{ij}^{/} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj} = g_{ij}, \quad m.e. \quad (AB)C = A(BC).$$

2. $A(B+C)=AB+AC$,
$(B+C)A=BA+CA$

Доказательство.
Пусть матрица $A = \|a_{ij}\|$ имеет размер $m\times p$, а матрицы $B = \|b_{ij}\|$ и $C = \|c_{ij}\|$ имеют размер $p\times n$. Тогда для элементов матрицы $A(B+C)= \|□_{ij}\|$ имеем

$$g_{ij} = \sum_{s=1}^{p} a_{is}(b_{si} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^{p} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{p} a_{is}c_{sj} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Из определения произведения матриц вытекает, что $AB= \|□_{ij}\|$, а $AC= \|□_{ij}\|$, т.е. $A(B+C)=AB+AC$. Аналогично доказываем, что $(B+C)A=BA+CA$.

Упражнение 1.6.
Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Вывести формулу для $(A+B)^2$ (при натуральном n под C^n понимается произведение $C{\cdot}C{\cdot}\ldots{\cdot}C$).

Решение.
Используем свойства сложения и умножения матриц:
$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = (A + B)A + (A + B)B = A{\cdot}A + B{\cdot}A + A{\cdot}B + B{\cdot}B =$
$= A^2 + B{\cdot}A + A{\cdot}B + B^2$.

Заметьте, что результат может совпасть с формулой сокращенного умножения
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
только в том случае, если $AB = BA$.
В общем случае это неверно!

Ответ: $(A + B)^2 = A^2 + B{\cdot}A + A{\cdot}B + B^2$.

Упражнение7.
Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Разложить на множители выражение $AB+2B$.

Решение.
Используем свойство единичной матрицы (см. упражнение 5):

$AE = EA = A$.

Следовательно, $B = EB$. Тогда $AB + 2B = AB + (2E)B = (A + 2E)B$ (использовано свойство 2 произведения матриц).

Ответ: $AB + 2B = (A + 2E)B$.

Упражнение 8.
Пусть A,B и C – квадратные матрицы одного порядка. Разложить на множители выражение $A^2C + AC^2$.

Решение.
Поскольку $A^2 = A{\cdot}A$, $C^2 = C{\cdot}C$, запишем заданный матричный многочлен в виде: $A^2C + AC^2 = A{\cdot}A{\cdot}C + A{\cdot}C{\cdot}C$ и воспользуемся свойствами произведения матриц:

$$A \cdot A \cdot C + A \cdot C \cdot C = A(A \cdot C + C \cdot C) = A((A + C)C) = A(A + C)C.$$

Ответ: $A^2C + AC^2 = A(A + C)C$.

Упражнение 9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти AB и BA.

Решение.

Определим размеры матрицы A: 4×1 и B: 1×4. Следовательно, существуют оба произведения: и AB, и BA, причем размер матрицы $C = AB$: 4×4, а матрицы $D = BA$: 1×1.

Вычислим элементы матрицы C:

$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} = 1\cdot3 = 3$; $c_{12} = a_{11}\cdot b_{12} = 1\cdot0 = 0$; $c_{13} = a_{11}\cdot b_{13} = 1\cdot2 = 2$;

$c_{14} = a_{11}\cdot b_{14} = 1\cdot(-1) = -1$;

$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} = -2\cdot3 = -6$; $c_{22} = a_{21}\cdot b_{12} = -2\cdot0 = 0$; $c_{23} = a_{21}\cdot b_{13} = -2\cdot2 = -4$;

$c_{24} = a_{21}\cdot b_{14} = -2\cdot(-1) = 2$;

$c_{31} = a_{31}\cdot b_{11} = 3\cdot3 = 9$; $c_{32} = a_{31}\cdot b_{12} = 3\cdot0 = 0$; $c_{33} = a_{31}\cdot b_{13} = 3\cdot2 = 6$;

$c_{34} = a_{31}\cdot b_{14} = 3\cdot(-1) = -3$;

$c_{41} = a_{41}\cdot b_{11} = 4\cdot3 = 12$; $c_{42} = a_{41}\cdot b_{12} = 4\cdot0 = 0$; $c_{43} = a_{41}\cdot b_{13} = 4\cdot2 = 8$;

$c_{44} = a_{41}\cdot b_{14} = 4\cdot(-1) = -4$.

Таким образом, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Матрица D состоит из единственного элемента:

$d_{11} = b_{11}\cdot a_{11} + b_{12}\cdot a_{21} + b_{13}\cdot a_{31} + b_{14}\cdot a_{41} = 3\cdot1 + 0\cdot(-2) + 2\cdot3 - 1\cdot4 = 5.$

Тогда $D = (5)$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & -3 \\ 12 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$, $D = (5)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Операции над матрицами*»

Задача 1.

Найти матрицу 5А – 2В, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -3 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Указание

Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите сначала матрицы $5A$ и $-2B$, а затем их сумму.

Решение

Используем определения линейных операций над матрицами:

$$5A=\begin{pmatrix}10 & -15 & 5\\ -5 & 0 & -10\end{pmatrix},\ 2B=\begin{pmatrix}8 & 6 & 4\\ -6 & 2 & -8\end{pmatrix},\ 5A-2B=\begin{pmatrix}10-8 & -15-6 & 5-4\\ -5+6 & 0-2 & -10+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -21 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Ответ: 5А – 2В $=\begin{pmatrix}2 & -21 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

Задача 2.

Найти x, y и m, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & x\\ y & -1\end{pmatrix},\ A+mB=\begin{pmatrix}-5 & 21\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

Указание

Используя операции умножения матрицы на число и сложения матриц, найдите элементы матрицы $A + mB$, а затем приравняйте их соответствующим элементам матрицы $\begin{pmatrix}-5 & 21\\ 8 & -1\end{pmatrix}$.

Решение

Если

$$A+mB=\begin{pmatrix}-5 & 21\\ 8 & -1\end{pmatrix},$$

$$\textbf{\textit{то}} \quad \begin{cases} 1-2\boldsymbol{m}=-5 \\ 6+\boldsymbol{mx}=21 \\ -1+\boldsymbol{my}=8 \\ 2-\boldsymbol{m}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{m}=3 \\ 6+3\boldsymbol{x}=21 \\ -1+3\boldsymbol{y}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{m}=3 \\ \boldsymbol{x}=5 \\ \boldsymbol{y}=3 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 5$, $y = 3$, $m = 3$.

Задача 3.
Найти AB и BA, если

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем используйте определение произведения матриц.

Решение

Проверим возможность перемножения матриц, определив их размерность. $A[2\times4]$, $B[4\times2]$. Следовательно, $n = l = 4$, $m = k = 2$, поэтому матрицы AB и BA существуют, причем $AB[2\times2]$, $BA[4\times4]$.

Для вычисления элементов матрицы $C = AB$ элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы столбцов матрицы B:

$$c_{11} = 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 9$$

(сумма произведений элементов первой строки A на элементы первого столбца B; первый индекс вычисляемого элемента задает номер строки A, второй индекс – номер столбца B);

$$c_{12} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5;$$
$$c_{21} = -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -9;$$
$$c_{22} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + (-1\_ \cdot 1 + 1 \cdot 4 = -3.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

При вычислении элементов матрицы $D = BA$ элементы строк B умножаются на элементы столбцов A:

$d_{11} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$; $d_{12} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4$; $d_{13} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$;
$d_{14} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$; $d_{21} = -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = -2$; $d_{22} = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 2$;
$d_{23} = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = -1$; $d_{24} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$; $d_{31} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1$;
$d_{32} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1$; $d_{33} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$; $d_{34} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$;
$d_{41} = 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8$; $d_{42} = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 0$; $d_{43} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2$;
$d_{44} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 1 & 2\\ -2 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ -8 & 0 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -9 & -3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 1 & 2\\ -2 & 2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ -8 & 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

Задача 4.
Выяснить, можно ли умножить друг на друга матрицы

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}.$$

Если произведение существует, вычислить его.

Указание

Проверьте возможность перемножения матриц, определив их размерность, а затем (в случае, если произведение AB или BA существует) найдите его, используя определение произведения матриц.

Решение

Сравним размерности матриц A и B: $A[3\times 2]$, $B[2\times 2]$. Следовательно, $n=l,\ m\neq k,$ поэтому произведение $AB[3\times 2]$ существует, а произведение BA – нет.
Найдем элементы AB:
$(ab)_{11} = 0\cdot 5 + 3\cdot 7 = 21$; $(ab)_{12} = 0\cdot 6 + 3\cdot 8 = 24$; $(ab)_{21} = 4\cdot 5 - 2\cdot 7 = 6$;
$(ab)_{22} = 4\cdot 6 - 2\cdot 8 = 8$; $(ab)_{31} = 1\cdot 5 - 1\cdot 7 = -2$; $(ab)_{32} = 1\cdot 6 - 1\cdot 8 = -2$.

Ответ: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}21 & 24\\ 6 & 8\\ -2 & -2\end{pmatrix}$, BA не существует.

Задача 5.
Вычислить матричный многочлен $A^2 - 3A$, где

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Указание

Найдите произведение AA и матрицу $-3A$, а затем сложите полученные матрицы.

Решение

Поскольку $A^2 = A \cdot A$, умножим матрицу A на себя по правилу умножения матриц. A – квадратная матрица 2-го порядка, поэтому A^2 – тоже квадратная матрица той же размерности.
Найдем элементы матрицы $C = A^2$:

$$c_{11} = -2\cdot(-2) + 1 \cdot 0 = -4;$$
$$c_{12} = -2\cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1;$$
$$c_{21} = 0\cdot(-2) + 3 \cdot 0 = 0;$$
$$c_{22} = 0\cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9.$$

Итак,

$$C = A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим элементы матрицы $\boldsymbol{D} = -3\boldsymbol{A}$. Для этого все элементы матрицы A умножим на -3:

$$\boldsymbol{D} = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -4+6 & 1-3 \\ 0+0 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}..$$

Ответ: $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 6.
Найти матрицу X из уравнения $X^2 = A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Из определения операции умножения матриц следует, что X – квадратная матрица 2-го порядка.
Пусть

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix},$$

тогда, приравнивая элементы произведения $X\cdot X$ соответствующим элементам A, получим систему уравнений для определения элементов матрицы X.

Решение

Из определения операции умножения матриц следует, что X – квадратная матрица 2-го порядка.
Пусть

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix},$$

тогда, приравнивая элементы произведения $X \cdot X$ соответствующим элементам A, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{bc} = 3 \\ \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bd} = 2 \\ \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{cd} = -2 \\ \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{d}^2 = -1 \end{cases}.$$

Разделив левую и правую части второго уравнения на соответствующие части третьего, получим, что $\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = -1,$ откуда $b = -c$. Подставим это выражение для b в систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{c}^2 = 3 \\ \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{cd} = -2 \\ \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{d}^2 = 1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения следует, что

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = -\frac{2}{\boldsymbol{c}}.$$

Складывая первое и третье уравнения, найдем, что

$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{d}^2 = 4 \Rightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}) = 4.$$

Используя предыдущий результат, получим, что

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d} = 4 : \left(-\frac{2}{\boldsymbol{c}}\right) = -2\boldsymbol{c}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} = -\dfrac{2}{\boldsymbol{c}} \\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{d} = -2\boldsymbol{c} \end{cases}, \quad \textit{откуда} \quad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c} - \frac{1}{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} - \frac{1}{\boldsymbol{c}}.$$

Подставим найденное выражение для d в последнее уравнение:

$$\boldsymbol{c}^2 - \left(\boldsymbol{c} - \frac{1}{\boldsymbol{c}}\right)^2 = 1, \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{c}^2 + 2 - \frac{1}{\boldsymbol{c}^2} = 1, \frac{1}{\boldsymbol{c}^2} = 1, \boldsymbol{c} = \pm 1.$$

Вычислим остальные элементы матрицы X:

1) если $c = 1$, то $a = -2$, $b = -1$, $d = 0$;
2) если $c = -1$, то $a = 2$, $b = 1$, $d = 0$.

Ответ: $\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.1.2. *Определители матриц*

Определители 2-го и 3-го порядков

Каждой квадратной матрице можно сопоставить некоторое число, называемое *определителем* матрицы и обозначаемое через $|A|$. Прежде чем дать общее определение этого понятия, определим его для матриц 2-го и 3-го порядков.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - (-3)\cdot 2 = 1.$$

Упражнение 1. Найти определители

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 2\cdot(-8) = -3 + 16 = 13;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 2\cdot(-4) = 3 + 8 = 11;$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot 4 - 3\cdot(-8) = 24 + 24 = 48.$$

Определителем матрицы 3-го порядка называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-4) - 2\cdot 11 - 1\cdot(-6) = -20.$$

При раскрытии определителей 2-го порядка выражение для определителя 3-го порядка может быть записано в общем случае в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Для вычисления определителя по этой формуле существует следующая геометрическая схема, называемая «правилом треугольников». Первые три слагаемых находятся перемножением элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Остальные три слагаемых (с минусами) получаются по аналогичной схеме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Упражнение 2. Найти определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1 - 1\cdot(-19) = 20;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) = -16;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-7) = -24.$$

Определитель *n*-го порядка

Пусть дана квадратная матрица A. *Минором* M_{ij} называется определитель матрицы, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример 3. Если

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix},$$

то $\boldsymbol{M}_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5$, $\boldsymbol{M}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10.$

Упражнение 3. Найти M_{32} и M_{31} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор M_{32} получаем, вычеркнув из матрицы A 3-ю строку и 2-ой столбец:

$$\boldsymbol{M}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -7.$$

Для вычисления минора M_{31} вычеркиваем из матрицы A 3-ю строку и 1-ый столбец:

$$\boldsymbol{M}_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = 5.$$

Общее понятие определителя дадим с помощью рекуррентной схемы, а именно, считая, что понятие определителя известно для матриц n–1-го порядка, дадим его для матриц n-го порядка (фактически так и вводилось понятие определителя для матриц 3-го порядка).

Определителем матрицы $A = \|a_{ij}\|$ *порядка* n называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \dots + (-1)^{n+1}M_{1n}.$$

Используя знак суммы, это определение можно записать в виде:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-32) = 52.$$

Упражнение 4. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)) - 2 \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)) = 3.$$

Свойства определителей

1. *Для любой квадратной матрицы порядка n*

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} (-1)^{\boldsymbol{i}+1} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}1} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{i}1}.$$

Тем самым определитель может быть вычислен не только с помощью разложения по первой строке (как в исходном определении), но и с помощью разложения по первому столбцу.

Доказательство

Для матриц второго порядка это свойство легко проверяется. Допустим, что доказываемое свойство имеет место для матриц порядка $n-1$. Докажем, что оно выполняется для матриц порядка n. В силу определения имеем:

$$|A| = a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}. \qquad (1)$$

Пользуясь предположением индукции, вычислим M_{1j}, $2 \le j \le n$, с помощью разложения по первому столбцу. Тогда

$$M_{1j} = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1} (M_{1j})_{i1},$$

где $(M_{1j})_{i1}$ – определитель, получаемый из матрицы A вычеркиванием 1-ой строки и j-го столбца, а также i-й строки и 1-го столбца. Подставляя это выражение в (1), получаем:

$$|A| = a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} a_{i1} (M_{1j})_{i1} = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} (M_{1j})_{i1}.$$

В силу того, что

$$\sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} (M_{1j})_{i1} = \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j} a_{1j} (M_{i1})_{1j} = M_{i1},$$

имеем:

$$|A| = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}.$$

Треугольной матрицей называется матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Упражнение 5.

Вычислим определитель треугольной матрицы, разлагая его по первому столбцу. В силу того, что в первом столбце только один элемент отличен от нуля, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Таким образом, *определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.*

Матрицей, *транспонированной* к матрице $A = \|a_{ij}\|$ размера $m \times n$, называется матрица $A^T = \|b_{ij}\|$ размера $n \times m$, где $b_{ij} = a_{ji}$. Иными словами, чтобы из исходной матрицы получить транспонированную, надо ее строки поставить в соответствующие столбцы.

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6. Для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти A^T и $(A^2)^T$.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A^T получим из матрицы A следующим образом: элементы 1-ой строки матрицы A образуют 1-ый столбец матрицы A^T, элементы 2-ой строки A – 2-ой столбец A^T, элементы 3-ей строки A – 3-ий столбец A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу A^2:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 19 \\ 45 & 30 & 27 \\ -1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Тогда $(A^2)^T = \begin{pmatrix} 7 & 45 & -1 \\ 20 & 30 & 4 \\ 19 & 27 & -13 \end{pmatrix}$.

2. *Для любой квадратной матрицы A*
$|A| = |A^T|$.

Доказательство.
Для матриц второго порядка это свойство легко проверяется. Допустим, что доказываемое свойство имеет место для матриц порядка $n-1$. Докажем, что оно выполняется для матриц порядка n. Разложим определитель матрицы A^T по первому столбцу:

$$|A^T| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} M_{1i}^*,$$

где M_{1i}^* - определитель, получаемый из матрицы A^T вычеркиванием i-ой строки и 1-го столбца. В силу предположения индукции $M_{1i}^* = M_{1i}$. Тем самым

$$|A^T| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} M_{1i} = |A|.$$

Из свойства 2 вытекает равноправность строк и столбцов, т.е. если какое-либо утверждение об определителе доказано относительно строк, то оно верно и относительно столбцов. Далее в силу сказанного все свойства будут доказываться лишь для строк.

3. *Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель изменит знак, а модуль его значения не изменится.*

Доказательство.
Докажем сначала это свойство для двух соседних строк. Снова воспользуемся методом полной индукции. Для матрицы 2-го порядка это свойство легко проверяется. Предположим, что перестановка двух соседних строк меняет знак определителя порядка $n-1$. Пусть в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{an} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

переставляются строки с номерами k и $k + 1$. Матрицу с переставленными строками обозначим через

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{an} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Напишем разложение определителей этих двух матриц по первому столбцу:

$$|A| = (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} M_{k+1,1} + \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1},$$

$$|B| = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} N_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k1} N_{k+1,1} + \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} N_{i1}.$$

При $i \neq k,k + 1$ в силу предположения индукции $N_{i1} = - M_{i1}$. Остается заметить, что $N_{k1} = M_{k+1,1}$, а $N_{k+1,1} = M_{k1}$. Тогда

$$|B| = (-1)^{k+1} a_{k+1,1} M_{k+1,1} + (-1)^{k+2} a_{k1} M_{k1} - \sum_{i \neq k,k+1} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = -|A|.$$

Пусть теперь в матрице переставляются строки с номерами i и j, $i < j$. Перестановку этих строк можно осуществить, переставляя только соседние строки, следующим образом. Сначала j-я строка последовательно переставляется с $j – i$ строками, стоящими над ней, а затем i-я строка последовательно переставляется с $j – i$ - 1 строками, стоящими под ней. Всего будет переставлено $2(j – i) – 1$ соседних строк. Поэтому определитель нечетное число раз будет менять знак и в результате поменяет знак.

Следствие 2.1. *Если у квадратной матрицы A имеются две одинаковые строки (столбца), то* $|A| = 0$.

Доказательство.

Пусть у матрицы A имеются две одинаковые строки. Поменяв их местами, получим ту же самую матрицу, но по свойству 3 ее определитель должен поменять знак, т.е. получаем, что $|A| = - |A|$, что возможно только при $|A| = 0$.

4. *Определитель матрицы может быть разложен по любой строке или столбцу, то есть имеют место равенства*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}, \qquad (3)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} M_{ik}. \qquad (4)$$

Доказательство.
Как уже отмечалось, в силу равноправности строк и столбцов достаточно доказать разложимость по любой строке. Положим

$$B = \begin{pmatrix} a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу B можно получить из матрицы A, последовательно меняя k-ю строку со строками, находящимися над ней. Поскольку таких перестановок будет $k - 1$ (столько строк лежит выше k-ой строки), то по свойству 3

$$|A| = (-1)^{k-1} |B|.$$

Вычислим теперь определитель матрицы B с помощью разложения по первой строке:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{kj} N_{1j}.$$

Нетрудно убедиться, что $N_{1j} = M_{kj}$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому

$$|A| = (-1)^{k-1} |B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Равенства в свойстве 4 могут быть записаны через алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj},$$
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}. \qquad (5)$$

Пример 6. Вычислим определитель из примера 4, разлагая его по третьему столбцу (в нем больше всего нулей):

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left(3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \right) = -12 + 64 = 52.$$

Упражнение 7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Наиболее удобно вычислять этот определитель разложением по 3-му столбцу (при этом потребуется вычислить только один определитель 3-го порядка):

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left(2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 3(2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)) = 12.$$

Линейной комбинацией матриц A_1, …, A_m одинакового размера называется матрица $A = □_1 A_1 + \ldots + □_m A_m$, где $□_1, \ldots, □_m$ – некоторые числа. В случае, если матрицы A_1, …, A_m имеют размеры $1 \times n$, говорят о линейной комбинации строк, а если размеры этих матриц $n \times 1$, то говорят о линейной комбинации столбцов.

5. *Если у квадратной матрицы A* **i**-*я строка (столбец) есть линейная комбинация строк (столбцов) A_i' и A_i'', т.е. имеет вид $□_1 A_i' + □_2 A_i''$, то*

$$|A| = □_1 |A'| + □_2 |A''|,$$

где A' и A'' - матрицы, у которых **i**-*е строки (столбцы) заменены на A_i' и A_i'' соответственно.*

Доказательство.
Пусть

$$A_i' = (a_{i1}', ..., a_{in}'),\ \ A_i'' = (a_{i1}'', ..., a_{in}'').$$

Тогда, разлагая определитель матрицы A по $\boldsymbol{i}$-ой строке, будем иметь:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_1\boldsymbol{a}_{i1}' + l_2\boldsymbol{a}_{i1}'' & \dots & l_1\boldsymbol{a}_{in}' + l_2\boldsymbol{a}_{in}'' \\ \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \dots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (l_1\boldsymbol{a}_{ij}' + l_2\boldsymbol{a}_{ij}'')\boldsymbol{A}_{ij} = l_1 \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}'\boldsymbol{A}_{ij} + l_2 \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij}''\boldsymbol{A}_{ij} = l_1 |\boldsymbol{A}'| + l_2 |\boldsymbol{A}''|.$$

Положив в этом свойстве $□_2 = 0$, получаем

Следствие 2.2. *При умножении строки (столбца) квадратной матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Упражнение 8. Пусть A – квадратная матрица порядка n с определителем $|A|$, а □ – число. Найти | □A|.

Решение.

Если $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \dots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \dots & \boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}$, ***то*** $l\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} l\boldsymbol{a}_{11} & l\boldsymbol{a}_{12} & \dots & l\boldsymbol{a}_{1n} \\ l\boldsymbol{a}_{21} & l\boldsymbol{a}_{22} & \dots & l\boldsymbol{a}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l\boldsymbol{a}_{n1} & l\boldsymbol{a}_{n2} & \dots & l\boldsymbol{a}_{nn} \end{pmatrix}$.

Поэтому, используя следствие 2.2, можно сказать, что определитель |□A| получается из определителя $|A|$ при умножении *каждой* из n строк матрицы на число □, следовательно, |□A| = □^{n} $|A|$.

Умножив строку (столбец) на □ = 0, из следствия 2.2 получаем

Следствие 2.3. *Если в квадратной матрице A имеется строка (столбец) с нулевыми элементами, то* $|A| = 0$.

6. *Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число.*

Доказательство.
Предположим, что к i-ой строке матрицы $A = \|a_{ij}\|$ прибавлена k-ая строка, умноженная на число □. Тогда по свойству 5, следствию 2.2 и следствию 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + l\,a_{k1} & \dots & a_{in} + l\,a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 7. Вычислим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

с помощью свойства 6. Вычтем из третьего столбца первый, а к четвертому столбцу прибавим первый, умноженный на 2. После этого разложим полученный определитель по второй строке. Имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка вынесем множитель 2 из второго столбца:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим ко второй строке первую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки первую:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 8 & 0 & 25 \\ -2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 25 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} = -2(-88 + 50) = 76.$$

Упражнение 9. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

пользуясь свойствами определителей.

Решение.

Приведем определитель матрицы A к треугольному виду. Для этого поменяем в нем местами 1-ую и 2-ую строки (при этом по свойству 3 определитель поменяет знак), а затем 1-ый и 2-ой столбец (определитель вновь поменяет знак, то есть окажется равным $|A|$). Получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из 2-ой строки 1-ую, умноженную на 2 (по свойству 6 определитель при этом не изменится):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель так, чтобы элемент a_{42} стал равным нулю. Для этого умножим 4-ю строку на 5 (тем самым по следствию 2.2 весь определитель умножится на 5) и вычтем из нее 2-ую строку, умноженную на 2:

$$|A| = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 34 \end{vmatrix}.$$

И наконец, прибавим к 4-ой строке 3-ю, умноженную на 13 (напомним еще раз свойство 6: такое преобразование не меняет значения определителя):

$$|A| = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot 60 = 60$$

(при вычислении определителя треугольной матрицы использован результат, полученный в упражнении 2.5). Итак, $|A| = 60$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «*Определители*»

Задача 1.

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Указание

Воспользуйтесь либо правилом треугольников, либо разложением определителя по 2-й строке или 2-му столбцу, содержащим нулевой элемент.

Решение

1-й способ (правило треугольников).
Вычислим определитель 3-го порядка, используя его определение:
$\Delta = 2\cdot0\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)\cdot2 + 5\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot5 - 1\cdot(-4)\cdot2 - (-1)\cdot1\cdot(-3) =$
$= 0 + 24 + 5 - 0 + 8 - 3 = 34.$

2-й способ (разложение по строке).
Применим свойство определителя:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

Для удобства вычисления выберем 2-ю строку, содержащую нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить A_{22}, так как произведение $a_{22}\,A_{22} = 0$. Итак,

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-3\cdot(-1) - 5\cdot1) = 2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(2\cdot1 - (-3)\cdot2) = -8$$

(напомним, что определитель второго порядка, входящий в алгебраическое дополнение A_{ij}, получается вычеркиванием из исходного определителя i-й строки и j-го столбца).
Тогда $\Delta = a_{21}\,A_{21} + a_{23}\,A_{23} = 1\cdot2 + (-4)(-8) = 34$.

Ответ: $\Delta = 34$.

Задача 2.
Используя свойства определителя, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}.$$

Указание

Вычитая из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки, добьемся того, что в 1-м столбце останется только один ненулевой элемент. Далее можно разложить определитель по 1-му столбцу.

Решение

Поскольку все элементы первого столбца равны 1, вычтем из 2-й и 3-й строк определителя соответствующие элементы 1-й строки (при этом величина определителя не изменится – свойство 6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 3 & 39 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что теперь все элементы 2-й строки кратны двум, а элементы 3-й строки кратны трем. По следствию 2.2 соответствующие множители можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 3-й строки полученного определителя соответствующие элементы 2-й строки:

$$\Delta = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и разложим определитель по 1-му столбцу:

$$\Delta = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 12) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

Ответ: $\Delta = 6$.

Разумеется, можно было вычислять этот определитель непосредственно (например, по правилу треугольников), но использование свойств определителей позволило существенно сократить и упростить численные расчеты.

Задача 3.

Используя свойства определителей, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -24 & -50 & 50 \\ 46 & 99 & -98 \end{vmatrix}.$$

Указание

Прибавьте к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтите удвоенные элементы 1-й строки. Затем вынесите за знак определителя все общие множители элементов какой-либо строки или столбца.

Решение

Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, а из элементов 3-й строки вычтем удвоенные элементы 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя множитель -1 из 2-й строки и 3 – из 3-й:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -52 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь из 3-го столбца вынесем множитель -2:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 48 & -26 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-го столбца элементы 3-го столбца и разложим полученный определитель по 3-й строке:

$$\Delta = -6 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 & -26 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 74 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot (23 - 74) = 6 \cdot 51 = 306.$$

Ответ: $\Delta = 306$.

Задача 4.

Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & 1 & 3 \\ 5 & 3 & \boldsymbol{x} \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 40.$$

Указание

Разложив определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке, и приравняв его 40, вы получите квадратное уравнение для x.

Решение

Разложим определитель, стоящий в левой части равенства, по первой строке. Предварительно найдем соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & x\\ 4 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(9-4x)=9-4x;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}5 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot(15-x)=x-15;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot(20-3)=17.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 3\\ 5 & 3 & x\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=x\cdot(9-4x)+1\cdot(x-15)+3\cdot17=-4x^2+10x+36,$$

и требуется решить квадратное уравнение

$$-4x^2+10x+36=40,\ 2x^2-5x+2=0,\ x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=2,\ x=\frac{1}{2}.$

Задача 5.

Решить неравенство

$$\begin{vmatrix}3 & x & 1\\ x & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}>-3.$$

Указание

Раскройте определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке.

Решение

Раскроем определитель, стоящий в левой части неравенства, по 1-й строке:

$$3(10 - 12) - x(2x - 9) + 4x - 15 > - 3;$$

$$-2x^2 + 13x - 18 > 0;$$

$$2x^2 - 13x + 18 < 0;$$

$$2 < x < 4{,}5.$$

Ответ: (2; 4,5).

Задача 6.

Используя свойства определителей (не раскрывая определитель), вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}\sin^2 a & \cos^2 a & \cos 2a\\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos 2b\\ \sin^2 g & \cos^2 g & \cos 2g\end{vmatrix}.$$

Указание

Используйте тригонометрическую формулу $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ и свойство определителя с двумя равными столбцами.

Решение

Из тригонометрии известно, что $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$. Вычтем из элементов 2-го столбца определителя соответствующие элементы 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a - \sin^2 a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos^2 b - \sin^2 a & \cos 2b \\ \sin^2 g & \cos^2 g - \sin^2 a & \cos 2g \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos 2b \\ \sin^2 g & \cos^2 g & \cos 2g \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos 2a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos 2b & \cos 2b \\ \sin^2 g & \cos 2g & \cos 2g \end{vmatrix}.$$

У полученного определителя, равного исходному (свойство 6), два столбца одинаковы, поэтому он равен нулю (следствие 2.1).

Ответ: 0.

Задача 7.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Указание

Преобразуйте определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуйтесь свойством 6.

Решение

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 6. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1. Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нуль. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки (напомним, что при этом величина определителя не изменится). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим этот определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot(0-3\cdot(-1)) = -9.$$

Ответ: $\Delta = -9$.

Задача 8.

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 0 \\ -67 & 83 & 2 & 0 \\ 19 & 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Указание

Разложите определитель по 1-й строке, а затем полученный определитель 3-го порядка вновь разложите по 1-й строке.

Решение

Разложим определитель по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 83 & 2 & 0 \\ 47 & -35 & -4 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка вновь разложим по 1-й строке:

$$\Delta = -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -35 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-8 - 0) = 24.$$

Ответ: Δ = 24.

Обратите внимание: если в определителе все элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Ответ: Δ = 24.

1.1.3. *Определитель произведения матриц. Обратная матрица*

Полураспавшиеся матрицы

Квадратная матрица называется *полураспавшейся*, если ее можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} B & P \\ Q & C \end{pmatrix},$$

где B и C – квадратные матрицы и хотя бы одна из матриц P, Q – нулевая.

Пример 1. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

являются полураспавшимися.

Предложение 3.1. *Если матрица*

$$A = \begin{pmatrix} B & P \\ Q & C \end{pmatrix}$$

- *полураспавшаяся, то* $|A| = |B|\,|C|$.

Доказательство.

Применим индукцию. Для матриц второго порядка утверждение очевидно. Пусть утверждение имеет место для матриц прядка $n - 1$. Докажем его справедливость для матриц порядка n. Будем считать, что $P = 0$ (случай $Q = 0$ будет вытекать из рассматриваемого с помощью транспонирования матрицы A). Пусть A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель матрицы A по первой строке:

$$|A| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Матрица, полученная вычеркиванием 1-й строки и j-го столбца, является полураспавшейся порядка $n - 1$. Поэтому по предположению индукции

$$M_{1j} = N_{1j}|C|,$$

где N_{1j} – минор элемента a_{1j} матрицы B. Тем самым

$$|A| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_{1j} N_{1j} |C| = \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_{1j} N_{1j} \right) |C| = |B|\,|C|.$$

Определитель произведения матриц

Теорема 3.1 (об определителе произведения). *Если A и B – квадратные матрицы, то*

$$\boxed{|AB| = |A||B|.}$$

Доказательство.

Пусть $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{ij}||$ - квадратные матрицы порядка n. Из предложения 3.1

$$|A||B|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Не изменяя значения определителя матрицы, стоящего в правой части этого равенства, выполним следующие преобразования: к 1-й строке прибавим (n + 1)-ую, умноженную на a_{11}, (n + 2)-ую, умноженную на a_{12}, …, (2n)-ую, умноженную на a_{1n}. Тогда получим равенство

$$|A||B|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

где

$$c_{1j}=\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ij}, \quad j=1,\dots,n,$$

– элементы первой строки матрицы AB. Теперь аналогичные преобразования проведем со 2-ой строкой, т.е. прибавим к ней (n + 1)-ую, умноженную на a_{21}, (n + 2)-ую, умноженную на a_{22}, …, (2n)-ую, умноженную на a_{2n}. Проведя преобразования подобного типа с остальными строками матрицы A, получим

$$|A||B|=\begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

Чтобы привести определитель матрицы, стоящей справа, к полураспавшемуся виду, поменяем местами 1-ый и (n + 1)-ый столбцы, 2-й и (n + 2)-ой, …, n – ый и (2n)-ый. Тогда

$$|A||B|=(-1)^n\begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -E \end{vmatrix}=(-1)^n|AB|\cdot|-E|=(-1)^n|AB|(-1)^n=|AB|.$$

Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Из того, что матрица A^{-1} может быть умножена на A как справа, так и слева, вытекает, что A^{-1} – тоже квадратная матрица порядка n.

Упражнение 1. Доказать, что $(A^{-1})^{-1} = A$.
Решение.
Пусть $B = A^{-1}$. Тогда, поскольку по определению обратной матрицы $AB = BA = E$, матрица A является обратной для матрицы B, то есть $(A^{-1})^{-1} = A$.

Из теоремы 3.1 следует, что $|A||A^{-1}| = |E| = 1$. Таким образом, если у матрицы A существует обратная, то $|A| \neq 0$ (такие матрицы называются *невырожденными*) и

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Теорема 3.2 (о фальшивом разложении). *Для любой квадратной матрицы* $A = \|a_{ij}\|$ *порядка n справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} |A|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (2)$$

Доказательство.
В случае $i = j$ эти формулы вытекают из формул (5) темы «Определители». Докажем равенство (1) при $i \neq j$. Пусть для определенности $i < j$. Рассмотрим определитель матрицы, которая получена из A заменой j-ой строки на i-ую. По следствию 2.1 определитель такой матрицы равен нулю. Тем не менее напишем его разложение по j-ой строке:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}B_{jk}.$$

Остается заметить, что алгебраические дополнения B_{jk} совпадают с A_{jk}. Аналогично доказывается равенство (2) при $i \neq j$ (здесь вместо строк надо рассматривать столбцы и разлагать нулевой определитель по столбцу).

Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ порядка n *присоединенной* называется матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найдем для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

присоединенную. Имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6;\ A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 9 \\ -4 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3.2 непосредственно вытекает

Следствие 3.1.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|\,E.$$

Теорема 3.3 (об обратной матрице). *Для любой невырожденной матрицы A обратная матрица единственна и имеет вид*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Доказательство.
В силу следствия 3.1 имеем:

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)=\frac{1}{|A|}A\tilde{A}=E,$$

$$\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A=E.$$

Тем самым матрица, определенная равенством (3.3), действительно является обратной. Докажем единственность обратной матрицы. Предположим, что нашлись две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда, умножив равенство

$$AA_1^{-1} = E$$

слева на A_2^{-1}, получим:

$$A_2^{-1}AA_1^{-1}=A_2^{-1}E=A_2^{-1}.$$

Отсюда, в силу того, что $A_2^{-1}A = E$, вытекает равенство

$$A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Пример 3. Найдем обратную матрицу для

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Для нахождения присоединенной матрицы найдем сначала все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=8;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\ A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Следовательно (напомним, что алгебраические дополнения для элементов строк в присоединенной матрице надо расположить в соответствующем столбце),

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}8 & -5 & -17\\ 3 & -3 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Поскольку $|A| = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = -9$, получаем:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{17}{9}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Найти обратную матрицу для

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Проверим невырожденность матрицы A:

$$|A|=1\cdot 2+4\cdot(-2)=-6\neq 0,$$

следовательно, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-8,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Построим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -8\\ 1 & -3 & 5\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Используя теорему 3.3, находим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 0 & -8\\ 1 & -3 & 5\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6}\\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Решение.

Пусть $C = B^{-1}A^{-1}$. Тогда, применяя свойство 1 произведения матриц, понятие единичной матрицы (лекция 1) и определение обратной матрицы, получим:

$$(AB)C = A(BC) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E;$$

$$C(AB) = (CA)B = ((B^{-1}A^{-1})A)B = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E.$$

Следовательно, матрица $C = B^{-1}A^{-1}$ удовлетворяет определению обратной матрицы для матрицы AB. Значит, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Обратная матрица*»

Задача 1.
Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

и проверить выполнение условий $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

Убедимся, что матрица A – невырожденная. $\Delta_A = 1\cdot 4 - 2\cdot(-1) \neq 0$, следовательно, A^{-1} существует.
Вычислим алгебраические дополнения к элементам A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 4 = 4;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot(-1) = -1\cdot(-1) = 1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 2 = -1\cdot 2 = -2;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 1 = 1.$$

Применим способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

> *Не забудьте, что обратная матрица образована из алгебраических дополнений к элементам* ***транспонированной*** *матрицы!*

Найдем произведения $A\,A^{-1}$ и $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{6}-\frac{1}{6} \\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3} & \frac{2}{6}+\frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{2}{6} & -\frac{2}{3}+\frac{4}{6} \\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{6} & \frac{1}{3}+\frac{4}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, найденная матрица A^{-1} отвечает определению обратной матрицы.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Задача 2.
Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

$\Delta_{\boldsymbol{A}} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \neq 0.$

Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad \boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3;$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad \boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta_{\boldsymbol{A}}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Задача 3.
Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

Вычислим определитель матрицы A разложением по первому столбцу:

$$\Delta_A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы A существует.
Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Значит,

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 4.
Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица A – невырожденная, и примените способ вычисления обратной матрицы.

Решение

$$\Delta_{\boldsymbol{A}} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10 \neq 0.$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad \boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad \boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad \boldsymbol{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad \boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}..$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,5 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 5.

При каких x, y, z матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & x \\ 1 & -5 & y \\ -1 & 6 & z \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

Указание

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Решение

Проверим невырожденность матрицы A:

$$\Delta_A = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 + 1\cdot(-4) = -1 \neq 0.$$

Необходимым условием того, что $B = A^{-1}$, является требование $AB = E$.

Найдем AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x+2y+3z \\ 0 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -x+2y+z \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы выполнялось условие $AB = E$, x, y, z должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=0 \\ x-y=0 \\ -x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x+3z=0 \\ x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=-\dfrac{4}{3}x \\ x-\dfrac{4}{3}x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-3, \\ z=4 \end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим, будет ли равно единичной матрице произведение BA:

$$BA=\begin{pmatrix} 2-4+3 & 2+4-6 & 3-3 \\ 2-5+3 & 2+5-6 & 3-3 \\ -2+6-4 & -2-6+8 & -3+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Значит, при найденных значениях x, y, z $B = A^{-1}$.

Ответ: x = -3, y = -3, z = 4.

1.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.2.1. *Системы с квадратной матрицей. Решение с помощью обратной матрицы. Правило Крамера*

Системы в матричном виде

Система уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

называется *системой линейных алгебраических уравнений*. Числа a_{ij}, i = 1,...,m, j = 1,..., n, называются *коэффициентами системы*, b_i, i = 1,..., m, – *свободными членами*, а x_j, j = 1,..., n, – *неизвестными*. Требуется по заданным коэффициентам системы и свободным членам найти *решение системы*, т.е. все такие числа $x_1,\ldots, x_n$, которые удовлетворяют равенствам (4.1). Если таких чисел не существует, то систему называют *несовместной*, в противном случае (т.е. если существует хотя бы одно решение системы) ее называют *совместной*.

Положим

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей системы*, b – *столбцом свободных членов*, x – *столбцом неизвестных*. Из определения умножения матриц вытекает, что равенства (4.1) могут быть записаны в виде

$$Ax = b, \quad (2)$$

называемым *матричным* видом системы.

Решение с помощью обратной матрицы

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений в матричном виде (2) с невырожденной квадратной матрицей A. В силу теоремы об обратной матрице (теорема 3.3) у матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Умножив равенство (4.2) слева на A^{-1}, будем иметь

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Отсюда получаем решение системы

$$x = A^{-1}b. \qquad (3)$$

Пример 1.

Найти решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

с помощью обратной матрицы.

Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем присоединенную матрицу $\tilde{A}$. Имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Следовательно,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A с помощью разложения по первой строке:

$$|A| = 1\cdot(-3) + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 3 = -12.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Упражнение 1.
Найти решение системы

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 = 6, \\ \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + 7\boldsymbol{x}_3 = 7, \\ \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 = 2 \end{gathered}$$

с помощью обратной матрицы.
Решение.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A|$ и алгебраические дополнения к элементам матрицы A и найдем обратную матрицу:

$$|\boldsymbol{A}| = 1\cdot 13 + 1\cdot(-5) + 1\cdot(-17) = -9;$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 13,\ \boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6,\ \boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ \boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ \boldsymbol{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -17,\ \boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -3,\ \boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -5 & -17 \\ 6 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (3):

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -5 & -17 \\ 6 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Правило Крамера

Из теоремы об обратной матрице следует, что равенство (4.3) может быть записано в виде

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x_j} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{A}_{1\boldsymbol{j}} + \ldots + \boldsymbol{b_n}\boldsymbol{A_{nj}}),\ \boldsymbol{j} = 1, \ldots, \boldsymbol{n}. \qquad (4)$$

Обозначим через Δ_j определитель матрицы, которая получается из A заменой j-го столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_{\boldsymbol{j}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \ldots & \boldsymbol{a}_{1,\boldsymbol{j}-1} & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_{1,\boldsymbol{j}+1} & \ldots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}1} & \ldots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}.\boldsymbol{j}-1} & \boldsymbol{b_n} & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}+1} & \ldots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по j-му столбцу, будем иметь:

$$\Delta_j = b_1 A_{1j} + \ldots + b_n A_{nj}.$$

Тем самым равенства (4) могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\Delta_1}{|\boldsymbol{A}|}, \qquad (5)$$

$$\ldots$$

$$\boldsymbol{x_n} = \frac{\Delta_{\boldsymbol{n}}}{|\boldsymbol{A}|}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 4.1 (правило Крамера). *Решение системы*

$$Ax = b$$

с невырожденной квадратной матрицей A единственно и имеет вид (5).

Пример 2.

Найти решение системы

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 &= 4, \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 &= 2, \\ \boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 &= 1 \end{aligned}$$

с помощью правила Крамера.
Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,\ |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\Delta_1}{|\boldsymbol{A}|} = 2,\ \boldsymbol{x}_2 = \frac{\Delta_2}{|\boldsymbol{A}|} = 1,\ \boldsymbol{x}_3 = \frac{\Delta_3}{|\boldsymbol{A}|} = 1.$$

Упражнение 2.
Найти решение системы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 + 5\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 &= 0, \\ 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 &= 3, \\ \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 &= -2 \end{aligned}$$

с помощью правила Крамера.
Решение.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},\ |\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 - 1 \cdot 5 = 31 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна и определена. Воспользуемся правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 31,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) - 1 \cdot (-7) = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 = 31.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{\Delta_1}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{31}{31} = 1,\ \boldsymbol{x}_2 = \frac{\Delta_2}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{0}{31} = 0,\ \boldsymbol{x}_3 = \frac{\Delta_3}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{31}{31} = 1.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Решение систем с помощью обратной матрицы. Правило Крамера*»

Задача 1.
Решить систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Указание

Найдите главный определитель системы (поскольку он не равен нулю, система имеет единственное решение). Затем вычислите Δ_x, Δ_y и Δ_z.

Решение

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение.
Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18.$$

Напоминаем: определители Δ_x, Δ_y и Δ_z получены из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном на столбец свободных членов.

Отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{9} = 4, \quad \Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 4$, $z = 2$.

Задача 2.

Используя правило Крамера, выяснить, при каких значениях *a* система

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Указание

Для того, чтобы система была совместна, но не определена, должно выполняться условие

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Решение

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Разложением по первой строке получим:

$$\Delta = a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) =$$
$$= a(a + 1)(a - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) =$$
$$= (a - 1)^2 (a + 2).$$

Следовательно, $\Delta = 0$ при $a = 1$ или $a = -2$.

Значит, при $a \neq 1$ и при $a \neq -2$ система имеет единственное решение.

Определим число решений при $a = 1$ и $a = -2$.

1) При $a = 1$ система имеет вид:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$и \quad \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, что при этом система имеет бесконечно много решений, так как она фактически состоит из одного уравнения, и ее решениями будут любые три числа, сумма которых равна 1.

2) При $a = -2$ получаем систему

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2, \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

для которой

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Следовательно, этом случае решений нет.

Ответ: $a = 1$.

Задача 3.
Решить систему с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ 5x - 4y - 7z = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедитесь, что матрица системы невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. Затем найдите для нее обратную матрицу и умножьте эту матрицу на столбец свободных членов.

Решение

Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_A = -51 \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение.
Найдем матрицу A^{-1}:

$$A_{11} = -11 \quad A_{21} = -25 \quad A_{31} = 2$$
$$A_{12} = 9 \quad A_{22} = -12 \quad A_{32} = 3$$
$$A_{13} = -13 \quad A_{23} = -11 \quad A_{33} = 7$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Если

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix},$$

то исходная система превращается в матричное уравнение $AX = B$, решение которого $X = A^{-1}B$. Следовательно,

$$X = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11 & -25 & 2 \\ 9 & -12 & 3 \\ -13 & -11 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -11-150+8 \\ 9-72+12 \\ -13-66+28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{51}\begin{pmatrix} -153 \\ -51 \\ -51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

Ответ: $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$.

Задача 4.

Решить систему по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 6 \\ 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3 \\ 3\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{z} = 5 \end{cases}.$$

Указание

Для решения по правилу Крамера найдите определители □, □$_x$, □$_y$, □$_z$.
Для решения с помощью обратной матрицы составьте матрицу, обратную к матрице системы, и умножьте ее на столбец свободных членов.

Решение

1. Правило Крамера

Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 48.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{16}{16} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{32}{16} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{48}{16} = 3.$$

2. Решение с помощью обратной матрицы

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы системы:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=6\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=11\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-1\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3$$

Составим матрицу, обратную к матрице системы:

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 7 & -5 & 1\\ 11 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Столбец решений системы получим, умножив A^{-1} на столбец свободных членов:

$$A^{-1}B=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 7 & -5 & 1\\ 11 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-12+18+10\\ 42-15+5\\ 66-3-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

1.2.2. *Ранг матрицы*

Определение ранга

Пусть дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ .. & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Выберем k строк и k столбцов в этой матрице и составим новую матрицу из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов. Определитель полученной матрицы называется *минором порядка* k. Например, если выбрать вторую и третью строки, первый и третий столбец, то получим минор второго порядка

$$M_2=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Пример 1.
Пусть

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1 & 0 & 7\\ 2 & 7 & 8 & -3 & 9\\ 7 & -3 & 5 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 6 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Выберем строки с номерами 1,3,4 и столбцы с номерами 2,3,5.

$$A=\begin{pmatrix}4 & \boxed{3} & \boxed{-1} & 0 & \boxed{7}\\ 2 & 7 & 8 & -3 & 9\\ 7 & \boxed{-3} & \boxed{5} & 3 & \boxed{4}\\ 0 & \boxed{1} & \boxed{6} & 4 & \boxed{1}\end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов, получим минор 3-го порядка

$$M_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 7\\ -3 & 5 & 4\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix}=111.$$

В матрице A много миноров 3-го порядка. Если выбрать строки с номерами 1,2,4 и столбцы с номерами 1,2,5:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{4} & \boxed{3} & -1 & 0 & \boxed{7}\\ \boxed{2} & \boxed{7} & 8 & -3 & \boxed{9}\\ 7 & -3 & 5 & 3 & 4\\ \boxed{0} & \boxed{1} & 6 & 4 & \boxed{1}\end{pmatrix},$$

то получим еще один из них:

$$M_3'=\begin{vmatrix}4 & 3 & 7\\ 2 & 7 & 9\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Рангом матрицы называется максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля.

Ранг матрицы A будем обозначать через rg A.

Элементарные преобразования матрицы

Вычисление ранга матрицы удобно производить, приведя матрицу к более простому виду с помощью преобразований, которые не меняют ее ранга.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются преобразования вида:

1. Перестановка двух строк.
2. Умножение строки на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число.

Аналогично определяются *элементарные преобразования столбцов.*

Теорема 5.1. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

Доказательство.

Остановимся лишь на доказательстве этого утверждения для 3-го типа элементарных преобразований для строк. Пусть матрица B получена из матрицы $A = ||a_{ij}||$ прибавлением к j-ой строке i-ой, умноженной на число □. Покажем, что rg $B \le$rg A. Пусть rg $A = r$. Рассмотрим произвольный минор матрицы B порядка $n \ge r$. Если этот минор не содержит j-ой строки, то он совпадает с соответствующим минором матрицы A и, следовательно, равен нулю. Если же он содержит j-ую строку, то он может быть представлен в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} + l\,a_{ik_1} & \dots & a_{jk_n} + l\,a_{ik_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_nk_1} & \dots & a_{i_nk_n} \end{vmatrix}.$$

Первый определитель равен нулю, так как он является минором матрицы A порядка $n > r$. Если i совпадает с одним из чисел i_1, ..., i_n, то второй определитель равен нулю как определитель с двумя равными строками. В противном случае второй определитель есть снова минор матрицы A порядка $n > r$ и поэтому тоже равен нулю.

Матрица A может быть получена из матрицы B прибавлением к j-ой строке i-ой, умноженной на −□, и в силу доказанного rg $A \le$ rg B. Тем самым доказано, что rg A = rg B.

Приведение матрицы к ступенчатому виду

Пусть дана ненулевая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Опишем алгоритм, который с помощью элементарных преобразований приводит матрицу A к некоторому более простому виду. Будем использовать только элементарные преобразования строк, чтобы в дальнейшем можно было применить тот же алгоритм к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Найдем в матрице A ненулевой элемент $a_{i_1 j_1}$ с минимальным номером столбца j_1 и переставим i_1-ую строку с первой. Тогда получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1j_1} & \dots & a^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2j_1} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mj_1} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix},$$

где

$$a^{(1)}_{1j_1} = a_{i_1 j},\ j = j_1, \dots, n,\ a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i \ne i_1, \\ a_{1j},\ i = i_1, \end{cases} j = j_1, \dots, n.$$

Теперь будем прибавлять к каждой строке с номером i, $i = 2,\dots,m$ первую строку, умноженную на число $-\dfrac{a'_{ij_1}}{a^{(1)}_{1j_1}}$. В результате этих преобразований получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a^{(1)}_{1j_1} & a^{(1)}_{1,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a^{(1)}_{2,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a^{(1)}_{m,j_1+1} & \dots & a^{(1)}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Далее, с матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{2,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,j_1+1}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

проведем преобразования, аналогичные тем, которые делались с исходной матрицей. Тогда исходная матрица будет приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1}^{(1)} & \dots & a_{1,j_2-1}^{(1)} & a_{1j_2}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mj_2}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, придем к матрице *ступенчатого* вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1}^{(1)} & \dots & a_{1,j_2-1}^{(1)} & a_{1j_2}^{(1)} & \dots & a_{1,j_r-1}^{(1)} & a_{1j_r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2}^{(2)} & \dots & a_{2,j_r-1}^{(2)} & a_{2j_r}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rj_r}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы легко найти ранг. Действительно, выбрав первые r строк и столбцы $j_1, \dots, j_r$, получим минор

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1}^{(1)} & a_{1j_2}^{(1)} & \dots & a_{1j_r}^{(1)} \\ 0 & a_{2j_2}^{(2)} & \dots & a_{2j_r}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rj_r}^{(r)} \end{vmatrix} = a_{1j_1}^{(1)} a_{2j_2}^{(2)} \dots a_{rj_r}^{(r)} \neq 0.$$

С другой стороны, любой минор порядка большего, чем r, равен нулю, так как содержит ненулевую строку. Тем самым ранг полученной матрицы равен r, а в силу того, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, ранг исходной матрицы тоже равен r.

Пример 2.

Приведем к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

и найдем ее ранг. Чтобы иметь дело с целыми числами, удобно иметь ненулевой элемент с минимальным номером столбца равным единице. Для этого вычтем из первой строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Теперь будем вычитать из всех строк, начиная со второй, первую, умноженную на элемент, стоящий во втором столбце и соответствующей строке:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из третьей строки вторую:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из последней строки третью, приходим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице три ненулевых строки, поэтому ее ранг, а значит, и ранг исходной матрицы равен 3.

Упражнение 1.
Найти ранг матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix},$$

приведя ее к ступенчатому виду.

Решение.

Поменяем местами 1-ую и 3-ю строки матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем 1-ую строку из 2-ой и 4-ой, а к 3-ей строке прибавим 1-ую, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-ей строки 2-ую, а из 4-ой – удвоенную 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами 3-й и 4-й столбцы и вычтем из последней строки 3-ю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор 4-го порядка из столбцов 1,2,3 и 5:

$$\boldsymbol{M}_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2 \neq 0.$$

Следовательно, rg A = 4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«Ранг матрицы»

Задача 1.

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Указание

Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если Δ_A не равен нулю, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$.

Решение

Единственным минором максимального (3-го) порядка для матрицы A является ее определитель. Если Δ_A не равен нулю, $r(A) = 3$; если $\Delta_A = 0$, $r(A) < 3$. Найдем Δ_A разложением по первой строке:

$$\Delta_{\boldsymbol{A}} = 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 7\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 7\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} = 20 - 5 - 15 = 0.$$

Следовательно, $r(A) < 3$. Поскольку матрица A содержит ненулевые элементы, $r(A) > 0$. Значит, $r(A) = 1$ или $r(A) = 2$. Если найдется минор 2-го порядка, не равный нулю, то $r(A) = 2$.

Вычислим минор из элементов, стоящих на пересечении двух первых строк и двух первых столбцов:

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}) = 2.$$

Ответ: $r(A) = 2$.

> *Если найден минор k-го порядка, не равный нулю, то можно утверждать, что $r(A) \geq k$. Если же выбранный минор k-го порядка равен нулю, то из этого еще не следует, что $r(A) < k$, так как могут найтись миноры того же порядка, не равные нулю.*

Задача 2.

Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4\\-1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4\\-3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4\end{pmatrix}.$$

Указание

Используя элементарные преобразования, приведите матрицу A к треугольному виду.

Решение

У матрицы A существуют миноры до 4-го порядка включительно, поэтому $r(A) \leq 4$. Разумеется, непосредственное вычисление всех миноров 4-го, 3-го и т.д. порядка потребовало бы слишком много времени. Поэтому, используя элементарные преобразования, приведем матрицу A к треугольному виду. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки, чтобы элемент a_{11} стал равным 1:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке первую, ко второй – удвоенную первую, к четвертой – первую, умноженную на 3. Тогда все элементы 1-го столбца, кроме a_{11}, окажутся равными нулю:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычтем вторую строку полученной матрицы из третьей и четвертой строк:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

и вычеркнем нулевые строки:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}..$$

Итак, ранг матрицы A равен рангу полученной матрицы размера 2×6, т.е. $r(A) \leq 2$. Минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

следовательно, $r(A) = 2$.

Ответ: $r(A) = 2$.

Задача 3.

Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

Указание

Используя элементарные преобразования, приведите матрицу A к треугольному виду.

Решение

Отметим, что минор, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении первых трех строк и первых трех столбцов, не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

поэтому ранг данной матрицы не меньше трех.

Приведем матрицу к треугольному виду:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивание нулевых строк приводит к тому, что

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Размер полученной матрицы 3×5, поэтому ее ранг не более трех. Поскольку минор 3-го порядка, не равный нулю, существует, ранг исходной матрицы равен 3.

Ответ: $r(A) = 3$.

Задача 4.

Найти значения λ, при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ l & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг.

Указание

Приведите матрицу A к треугольному виду и найдите значения λ, при которых с помощью элементарных преобразований вторую строку можно сделать нулевой.

Решение

Переставим столбцы матрицы A:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к треугольному виду с помощью элементарных преобразований:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda - 12 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что при $\lambda = 0$ вторая строка матрицы становится нулевой, и после ее вычеркивания получаем:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ его порядок равен 2, следовательно, при $\lambda = 0$ $r(A) = 2$.

Если $\lambda \neq 0$, то минор, составленный из последних трех столбцов, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-13) = 13\lambda \neq 0.$$

Значит, при $\lambda \neq 0$ $r(A) = 3$.

Итак, наименьший ранг, равный 2, матрица A имеет при $\lambda = 0$.

Ответ: $\lambda = 0$.

1.2.3. *Решение систем линейных уравнений в общем случае. Теорема Кронекера-Капелли*

Теорема о базисном миноре

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Пример 1. В матрице

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 9 & -1 & 2 & 19\\ 0 & 2 & 7 & 0 & 1 & 14\\ 0 & 3 & 9 & -1 & 3 & 21\\ 0 & 2 & 4 & -2 & 3 & 12\end{pmatrix}$$

из примера 2 раздела «Ранг матрицы», ранг которой равен 3, базисным минором является, например, минор, получаемый при выборе строк с номерами 1,2,3 и столбцов с номерами 3,4,5. Действительно,

$$\boldsymbol{M}_3=\begin{vmatrix}9 & -1 & 2\\ 7 & 0 & 1\\ 9 & -1 & 3\end{vmatrix}=7\neq 0.$$

Можно выбрать и другой базисный минор, например, минор, получаемый при выборе строк с номерами 1,2,3 и столбцов с номерами 4,5,6:

$$\boldsymbol{M}_3'=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 19\\ 0 & 1 & 14\\ -1 & 3 & 21\end{vmatrix}=12\neq 0.$$

Теорема 6.1 (о базисном миноре). *Любая строка (столбец) матрицы есть линейная комбинация строк (столбцов) базисного минора.*

Доказательство.

В силу того, что при транспонировании матрицы базисный минор остается базисным, достаточно доказать утверждение для столбцов. Будем считать, что базисный минор порядка r находится в левом верхнем углу матрицы

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \dots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{r}} & \dots & \boldsymbol{a}_{1\boldsymbol{n}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{r}1} & \dots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{rr}} & \dots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{rn}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}1} & \dots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{mr}} & \dots & \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{mn}}\end{pmatrix}$$

(этого всегда можно добиться перестановкой строк и столбцов). Зафиксируем некоторый номер столбца k, $r<k\leq n$, и рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix},$$

где $1 \le i \le m$. Если $1 \le i \le r$, то этот определитель равен нулю как определитель с двумя одинаковыми строками (см. следствие 2.1), а если $r < i \le m$, то он равен нулю как минор порядка $r + 1$ (ведь ранг матрицы равен r). Разложив рассматриваемый определитель по последней строке, будем иметь

$$a_{i1}A_{r+1,1} + \dots + a_{ir}A_{r+1,r} + a_{ik}A_{r+1,r+1} = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $A_{r+1,r+1}$ не равно нулю (это алгебраическое дополнение совпадает с выбранным базисным минором), то при всех $1 \le i \le m$ из равенства (1) получаем

$$a_{ik} = l_1 a_{i1} + \dots + l_r a_{ir},\ l_j = -\frac{A_{r+1,j}}{A_{r+1,r+1}}.$$

Это и означает, что

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = l_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + l_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (2)$$

Напомним, что матрицей системы A и столбцом свободных членов b называются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Нам потребуется еще понятие *расширенной* матрицы системы

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.2 (Кронекера-Капелли). *Для того чтобы система* (2) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$rg\bar{A} = rgA. \qquad (3)$$

Доказательство.
1. Необходимость.
Пусть система (2) совместна. Это означает, что найдутся числа $x_1, \ldots, x_n$ такие, что

$$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{b}, \qquad (4)$$

где через A_j, $j = 1, ..., n$, обозначается j-й столбец матрицы A. Вычитая из последнего столбца расширенной матрицы $\bar{A}$ первый, умноженный на x_1, затем второй, умноженный на x_2 и т.д., последний, умноженный на x_n, придем к матрице

$$\bar{\boldsymbol{A}}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \ldots & \boldsymbol{a}_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \ldots & \boldsymbol{a}_{mn} & 0 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен рангу расширенной матрицы $\bar{A}$. Поскольку очевидно, что rg $\bar{A}'$ = rg A, имеет место равенство (3).
2. Достаточность.
Пусть выполнено равенство (3). Выберем в матрице A базисный минор. Пусть его столбцы имеют номера $j_1,...,j_r$. Этот же минор является базисным и для расширенной матрицы $\bar{A}$. По теореме о базисном миноре столбец b может быть представлен как линейная комбинация столбцов базисного минора

$$l_1\boldsymbol{A}_{j_1} + \ldots + l_r\boldsymbol{A}_{j_r} = \boldsymbol{b}.$$

Положив

$$\boldsymbol{x}_{j_k} = l_k, \boldsymbol{k} = 1, \ldots, \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{x}_j = 0, \boldsymbol{j} \notin \boldsymbol{j}_1, \ldots, \boldsymbol{j}_r,$$

получим, что имеет место равенство (4). Это означает, что найденные x_j, $j = 1,...,n$, удовлетворяют системе (2).

Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Пусть дана совместная система линейных алгебраических уравнений (2). Выберем в матрице этой системы какой-нибудь базисный минор. Неизвестные, коэффициенты при которых образуют столбцы базисного минора, называются *базисными*, а остальные неизвестные – *свободными*.

Общим решением системы называется представление базисных неизвестных через свободные. Будем считать, что порядок базисного минора равен r и он находится в левом верхнем углу (этого всегда можно добиться, переставляя уравнения системы и переобозначая переменные). Из теоремы

Кронекера-Капелли вытекает, что этот минор является базисным и для расширенной матрицы, а из теоремы о базисном миноре следует, что все строки в расширенной матрице, начиная с (r + 1)-ой, есть линейные комбинации строк базисного минора. Иначе говоря, все уравнения системы, начиная с (r + 1)-ого, являются следствием первых r уравнений и их можно отбросить. Перенеся свободные неизвестные в правую сторону, получим систему

$$\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1r}\boldsymbol{x}_r = -\boldsymbol{a}_{1,r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} - \ldots - \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\boldsymbol{a}_{r1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{a}_{rr}\boldsymbol{x}_r = -\boldsymbol{a}_{r,r+1}\boldsymbol{x}_{r+1} - \ldots - \boldsymbol{a}_{rn}\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{b}_r.$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\boldsymbol{M}x = \boldsymbol{x}_{r+1}a_{r+1} + \ldots + \boldsymbol{x}_n a_n + b, \qquad (5)$$

где

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \ldots & \boldsymbol{a}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{rr} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_r \end{pmatrix}, a_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{rj} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{r} + 1, \ldots, \boldsymbol{n},\ b = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_r \end{pmatrix}.$$

В силу того, что $|M|$ не равен нулю, существует обратная матрица M^{-1}. Умножая равенство (5) на M^{-1}, получим общее решение

$$x = \boldsymbol{x}_{r+1}\boldsymbol{M}^{-1}a_{r+1} + \ldots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{M}^{-1}a_n + \boldsymbol{M}^{-1}b. \qquad (6)$$

Введем столбцы из n строк:

$$\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1}b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1}a_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1}a_{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}^{-1}a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Придавая свободным переменным x_{r+1}, ..., x_n произвольные числовые значения C_1, …, C_{n-r}, общее решение (6.6) можно переписать в виде:

$$x = e_0 + C_1e_1 + \ldots + C_{n-r}e_{n-r}.$$

Если свободные неизвестные отсутствуют, т.е. $r = n$, то решение системы единственно. Таким образом, из теоремы Кронекера-Капелли вытекает

Следствие 6.1. *Для того чтобы система* (2) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\boxed{rg\bar{A} = rgA = n.}$$

Тем самым возможны лишь следующие три случая:

1. $rg\bar{A} \neq rgA$ – система несовместна.
2. $rg\bar{A} = rgA = n$ – система имеет единственное решение.
3. $rg\bar{A} = rgA < n$ – система имеет бесконечно много решений.

Однородные системы

Система (2) называется *однородной*, если $b_1 = \ldots = b_m = 0$. Очевидно, что однородная система всегда совместна – у нее имеется нулевое решение $x_1 = x_n = 0$. Для однородной системы возможны лишь следующие два случая:

1. $rg\bar{A} = rgA = n$ – система имеет единственное нулевое решение.
2. $rg\bar{A} = rgA < n$ – система имеет бесконечно много решений.

Поскольку для квадратной матрицы A порядка n rg $A < n$ в том и только в том случае, если $|A| = 0$, получаем

Следствие 6.2. *Однородная система с квадратной матрицей имеет ненулевое решение в том и только в том случае, если* $|A| = 0$.

Метод Гаусса

При практическом решении систем линейных алгебраических уравнений удобно пользоваться *методом Гаусса*, который состоит в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Предположим, что расширенная матрица системы (2) приведена к ступенчатому виду. Будем считать, что переменные переобозначены так, что базисный минор матрицы системы находится в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1r}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2r}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1}^{(r+1)} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что система (2) приведена к виду

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1r}^{(1)}x_r + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(2)}x_r + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{rr}^{(r)}x_r + \dots + a_{rn}^{(r)}x_n &= b_r^{(r)}, \\ 0 &= b_{r+1}^{(r+1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Процесс приведения системы к виду (7) называется *прямым ходом* метода Гаусса.

Если $b^{(r+1)}{}_{r+1}$ не равно нулю , то система несовместна. Если $b^{(r+1)}{}_{r+1} = 0$, то из r-го уравнения выразим базисное неизвестное x_r через свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$. Затем подставим это выражение в $(r-1)$-ое уравнение и выразим x_{r-1} через свободные неизвестные и т.д. Этот процесс называется *обратным ходом* метода Гаусса. В результате обратного хода все базисные неизвестные будут выражены через свободные, т.е. будет получено общее решение системы.

Пример 2. Найдем решение системы

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_5 &= 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 - x_5 &= 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -1 \end{aligned}$$

методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из строк с номерами 2,3,4 и 5 первую строку, умноженную на числа 2,1,2 и 2 соответственно. Тогда получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей и четвертой строк вторую и прибавляя к пятой строке вторую, придем к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система приведена к виду

$$\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_5 = 1,$$

$$\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 + 2\boldsymbol{x}_5 = 2.$$

Выбрав x_1 и x_2 в качестве базисных неизвестных, с помощью обратного хода метода Гаусса находим выражения базисных неизвестных через свободные:

$$\boldsymbol{x}_1 = 5\boldsymbol{x}_3 - 3\boldsymbol{x}_4 + 5\boldsymbol{x}_5 - 3,$$

$$\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 - 2\boldsymbol{x}_5 + 2.$$

Придавая свободным переменным x_3, x_4, x_5 произвольные числовые значения C_1, C_2, C_3, общее решение можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \\ \boldsymbol{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1. Найти решение системы

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1,$$

$$2x_1 - 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3$$

методом Гаусса.

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и приведем ее к ступенчатому виду. Для этого вычтем из 3-ей строки 1-ую, а из 2-ой – удвоенную первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к 3-ей строке 2-ую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система приведена к виду

$$\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2 + 4\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = 1,$$

$$-\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 = -2.$$

Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_3 и выразим их через свободные неизвестные x_2 и x_4:

$$\boldsymbol{x}_1 = 3\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_4 - 9,$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_4 + 2.$$

Если $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, то общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{C}_2 \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Системы уравнений общего вида. Метод Гаусса*»

Задача 1.

Указать базисный минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание

Определите вначале ранг матрицы A, а затем найдите ненулевой минор, порядок которого равен $r(A)$.

Решение

Определим $r(A)$. Вторая и четвертая строки A равны, поэтому после вычитания из 4-й строки 2-й получаем:

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор полученной матрицы, составленный из первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4 \neq 0.$$

Таким образом, найден минор максимально возможного (3-го) порядка, не равный нулю. Следовательно, ранг матрицы A равен рангу преобразованной матрицы, то есть равен 3, а рассмотренный минор является базисным.

Ответ: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Задача 2.

Определить количество решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Указание

Сравните ранги матрицы системы и расширенной матрицы.

Решение

Сравним ранги матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -8 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений будем искать ранг матрицы A_1, отделив ее последний столбец вертикальной чертой. Тогда столбцы, стоящие слева от черты, образуют матрицу A, и мы одновременно найдем ранги обеих матриц.

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую, а из третьей – первую, умноженную на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, $r(A) = 2$, а $r(A_1) = 3$, следовательно, система не имеет решений.

Ответ: система несовместна.

Задача 3.

Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедившись в том, что система совместна, определите базисные и свободные неизвестные и выразите базисные неизвестные через свободные.

Решение

Найдем $r(A)$ и $r(A_1)$:

$$\boldsymbol{A}_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 15 & -21 & 33 & -39 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \end{array}\right).$$

Итак, $r = r(A) = r(A_1) = 2$, а число неизвестных $n = 5$. Следовательно, $r < n$, и система имеет бесконечно много решений (совместна, но не определена).

Число базисных неизвестных равно r, то есть двум. Выберем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2, коэффициенты при которых входят в базисный минор преобразованной матрицы A: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Соответственно x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные.

Запишем систему, равносильную исходной, коэффициентами в которой являются элементы полученной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 - 13x_5 = -12 \end{cases}$$

и выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}.$$

Получено общее решение системы. Одно из частных решений можно найти, положив все свободные неизвестные равными нулю: $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Тогда $x_1 = -\dfrac{1}{5}$, $x_2 = -\dfrac{12}{5}$.

Ответ: $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -\dfrac{\boldsymbol{x}_3 + 2\boldsymbol{x}_4 + 4\boldsymbol{x}_5 - 1}{5} \\ \boldsymbol{x}_2 = \dfrac{7\boldsymbol{x}_3 - 11\boldsymbol{x}_4 + 13\boldsymbol{x}_5 - 12}{5} \end{cases}.$

Задача 4.

Найти общее решение системы, выразив в ответе первые неизвестные через последние:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 = 5 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + 5\boldsymbol{x}_3 - 2\boldsymbol{x}_4 = 3 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 + 3\boldsymbol{x}_4 = -1 \end{cases}.$$

Указание

Приведите расширенную матрицу к виду

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Решение

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Минор, состоящий из первых трех столбцов полученной матрицы,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

поэтому $r(A) = r(A_1) = 3$, выбранный минор является базисным, а x_1, x_2, x_3, коэффициенты при которых составляют базисный минор, – базисными неизвестными. Тогда свободное неизвестное – x_4, и система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 - x_4 \\ -7x_2 + 8x_3 = 5x_4 - 12, \\ \quad -3x_2 = -x_4 - 11 \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{6x_4 + 5}{8} \\ x_2 = \dfrac{x_4 + 11}{3} \\ x_3 = \dfrac{22x_4 + 41}{24} \end{cases}$.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{6x_4 + 5}{8}$; $x_2 = \dfrac{x_4 + 11}{3}$; $x_3 = \dfrac{22x_4 + 41}{24}$.

Задача 5.

Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Указание

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу свободных неизвестных. Задайте свободным неизвестным значения 1,0,0; 0,1,0; 0,0,1 и вычислите соответствующие значения базисных неизвестных.

Решение

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу свободных неизвестных.

Матрица A_1 отличается от матрицы A только добавлением нулевого столбца свободных членов, поэтому все ее ненулевые миноры являются минорами матрицы A, то есть $r(A) = r(A_1)$. Найдем $r(A)$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&5&-1&-1&-1\\1&-6&4&5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&-6&4&5&0\\1&-6&4&5&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&-6&4&5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&4&-1\\1&-6&4&5&0\end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix}4&-1\\5&0\end{vmatrix}=5\neq 0.$

Значит, $r(A)$ = 2. Пусть x_4, x_5 – базисные неизвестные, x_1, x_2, x_3 – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases}4\boldsymbol{x}_4-\boldsymbol{x}_5=-2\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-3\boldsymbol{x}_3\\ \quad 5\boldsymbol{x}_4=-\boldsymbol{x}_1+6\boldsymbol{x}_2-4\boldsymbol{x}_3\end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_4=\dfrac{-\boldsymbol{x}_1+6\boldsymbol{x}_2-4\boldsymbol{x}_3}{5}\\ \boldsymbol{x}_5=\dfrac{6\boldsymbol{x}_1+19\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3}{5}\end{cases}.$$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$.

Тогда x_4 = -0,2, x_5 = 1,2, и решение можно записать в виде столбца

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-0,2\\1,2\end{pmatrix}.$$

2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

При этом x_4 = 1,2, x_5 = 3,8, и следующее решение системы имеет вид

$$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1,2\\3,8\end{pmatrix}.$$

3) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Отсюда x_4 = -0,8, x_5 = -0,2, и последний столбец

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений, построенная при таком выборе свободных неизвестных, называется ***нормальной****. Поскольку столбцы свободных неизвестных* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений* X_1, X_2, X_3.

Итак, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$$

При этом любое решение данной системы имеет вид: $X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1,2 \\ 3,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0,8 \\ -0,2 \end{pmatrix}.$

Задача 6.

Составить однородную систему из двух уравнений, для которой столбцы

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Указание

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}.$$

Подставьте вместо $x_1, \ldots, x_5$ элементы столбцов X_1, X_2, X_3 и решите полученную систему уравнений для коэффициентов a_{ij}.

Решение

Существует бесконечно много систем однородных линейных уравнений, для каждой из которых фундаментальная система решений имеет указанный вид. Число уравнений в таких системах может быть различным. При этом можно указать их наименьшее требуемое количество, а увеличивать их число можно неограниченно.

Определим вначале, из какого наименьшего числа уравнений может состоять такая система.

Число элементов каждого столбца равно пяти, следовательно, в системе пять неизвестных ($n = 5$). Количество столбцов, составляющих фундаментальную систему, равно трем, то есть $n - r = 3$, поэтому $r = 5 - 3 = 2$. Значит, матрица A должна иметь по крайней мере 2 строки. Следовательно, система уравнений с заданной фундаментальной системой решений может состоять из двух и более уравнений.

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}.$$

Подставим вместо $x_1, \ldots, x_5$ элементы столбцов X_1, X_2, X_3. Получим:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + 2a_{23} - a_{24} + a_{25} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{22} + 3a_{23} + a_{24} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \\ a_{21} - a_{22} + 2a_{25} = 0 \end{cases}.$$

Разобьем полученные 6 уравнений на две системы, одна из которых содержит a_{1i}, а вторая – a_{2i}:

$$1)\quad \begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ \qquad a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ \qquad a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \end{cases}.$$

Найдем какое-либо частное решение этой системы. Приведем ее матрицу к треугольному виду:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

откуда $\begin{cases}\boldsymbol{a}_{11}+\boldsymbol{a}_{12}+2\boldsymbol{a}_{13}=\boldsymbol{a}_{14}-\boldsymbol{a}_{15}\\ \boldsymbol{a}_{12}+3\boldsymbol{a}_{13}=-\boldsymbol{a}_{14}\\ 4\boldsymbol{a}_{13}=-3\boldsymbol{a}_{14}-\boldsymbol{a}_{15}\end{cases}.$

Следовательно, $\begin{cases}\boldsymbol{a}_{11}=\dfrac{5\boldsymbol{a}_{14}-5\boldsymbol{a}_{15}}{4}\\ \boldsymbol{a}_{12}=\dfrac{5\boldsymbol{a}_{14}+3\boldsymbol{a}_{15}}{4}\\ \boldsymbol{a}_{13}=\dfrac{-3\boldsymbol{a}_{14}-\boldsymbol{a}_{15}}{4}\end{cases}.$

Выберем $a_{14} = a_{15} = 4$, тогда $a_{11} = 0$, $a_{12} = 8$, $a_{13} = -4$.

2) Так же выглядит общее решение системы для $\boldsymbol{a}_{2i}$:

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_{21}=\dfrac{5\boldsymbol{a}_{24}-5\boldsymbol{a}_{25}}{4}\\ \boldsymbol{a}_{22}=\dfrac{5\boldsymbol{a}_{24}+3\boldsymbol{a}_{25}}{4}\\ \boldsymbol{a}_{23}=\dfrac{-3\boldsymbol{a}_{24}-\boldsymbol{a}_{25}}{4}\end{cases}.$$

Выберем свободные неизвестные так, чтобы получить решение, линейно независимое с предыдущим.

Пусть $a_{24} = 4$, $a_{25} = 0$, тогда $a_{21} = 5$, $a_{22} = 5$, $a_{23} = -3$.

Итак, используя найденные значения коэффициентов, можно составить линейную однородную систему:

$$\begin{cases}8\boldsymbol{x}_2-4\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_4+4\boldsymbol{x}_5=0\\ 5\boldsymbol{x}_1+5\boldsymbol{x}_2-3\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_4=0\end{cases},$$

фундаментальная система решений которой имеет вид, приведенный в условии задачи.

Ответ: $\begin{cases}8\boldsymbol{x}_2-4\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_4+4\boldsymbol{x}_5=0\\ 5\boldsymbol{x}_1+5\boldsymbol{x}_2-3\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_4=0\end{cases}.$

Задача 7.

Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$

с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Указание

Убедитесь в том, что система совместна. Затем составьте соответствующую однородную систему и найдите для нее фундаментальную систему решений. Далее используйте то, что общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Решение

Убедимся в том, что система совместна:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, $r(A) = r(A_1) = 2$ – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ 3x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 6x_5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4x_3 + 3x_4 - 6x_5}{3} \\ x_2 = \dfrac{x_3 - 6x_4 + 3x_5}{3} \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений может быть выбрана так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{x}_5 = 2 \\ 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_3 - 3\boldsymbol{x}_4 + 6\boldsymbol{x}_5 = 5 \end{cases}.$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$\boldsymbol{X}_{частн} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, и общее решение системы имеет вид:

$X = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + X_{частн}$, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Ответ: $\boldsymbol{X} = c_1\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задача 8.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание

Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при x равнялся единице, а затем исключите x из второго и третьего уравнений.

Решение

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и

2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при *x* равнялся единице:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 4 \\ 3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z} = 9 \\ 2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y} + 3\boldsymbol{z} = 11 \end{cases}.$$

Теперь исключим *x* из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 4 \\ -13\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = -3 \\ -11\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 4 \\ -13\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = -3 \\ -24\boldsymbol{y} = 0 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем, что $y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $z = 3$, $x = 1$.

Ответ: $x = 1$, $y = 0$, $z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ b_2 y + c_2 z = d_2 \\ c_3 z = d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 9.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4 = 1 \\ 2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{x}_4 = 2 \\ 3\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4 = -3 \\ 2\boldsymbol{x}_1 + 2\boldsymbol{x}_2 - 2\boldsymbol{x}_3 + 5\boldsymbol{x}_4 = -6 \end{cases}.$$

Указание

Исключите x_2 из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3.

Решение

Исключим x_2 из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить x_3:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $x_1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $x_2 = 2$.

Ответ: $\boldsymbol{x}_1 = 0, \boldsymbol{x}_2 = 2, \boldsymbol{x}_3 = \frac{5}{3}, \boldsymbol{x}_4 = -\frac{4}{3}$.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1.1. *Линейные операции над векторами. Скалярное произведение*

Определение вектора

Пусть даны две точки *A* и *B*. Отрезок, соединяющий эти точки, будем называть *направленным*, если указаны начальная и конечная точка отрезка, т.е. на отрезке указано направление.

Вектором называется направленный отрезок. Векторы будем обозначать буквами ***a***, ***b***, ***c***,… или, указывая начальные и конечные точки, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \ldots$.

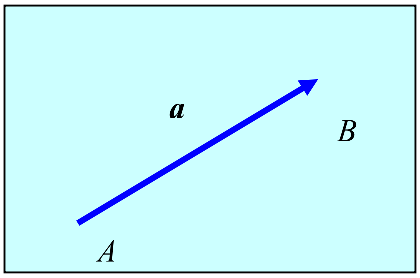

Рис.1

Вектор называется *нулевым*, если начальная и конечная точки совпадают. В этом случае будем писать ***a*** = 0. *Длиной* вектора называется длина соответствующего ему направленного отрезка. Длина обозначается через | ***a*** | или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы ***a*** и ***b*** называются *коллинеарными* (при этом пишут ***a*** || ***b***), если существует прямая, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Иными словами, мы рассматриваем *свободные* векторы, начальные точки которых могут выбираться произвольным образом.

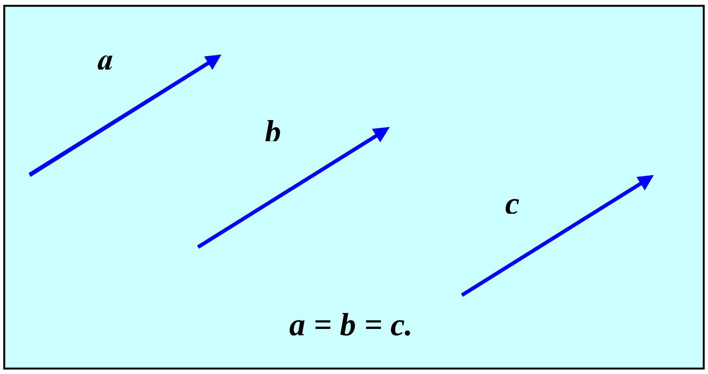

Рис. 2

Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов. Пусть даны векторы ***a*** и ***b***. Совместим начальную точку вектора ***b*** с конечной точкой вектора ***a***. Тогда вектор, начальная точка которого совпадает с начальной точкой вектора ***a***, а конечная – с конечной точкой ***b***, называется *суммой векторов* ***a*** + ***b***.

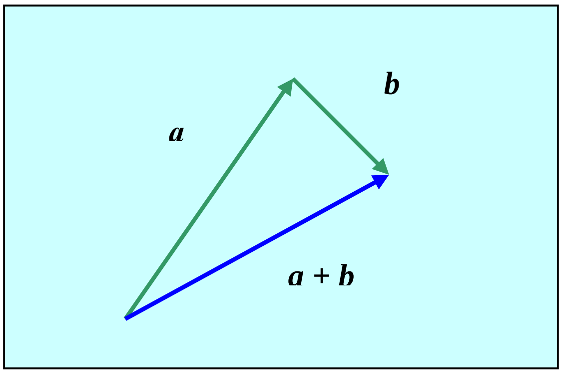

Рис. 3

Совместим начальные точки векторов ***a*** и ***b*** и обозначим эту точку через O. Построим параллелограмм $OACB$ на сторонах этих векторов. Тогда вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Тем самым получено эквивалентное определение суммы векторов, называемое *правилом параллелограмма*.

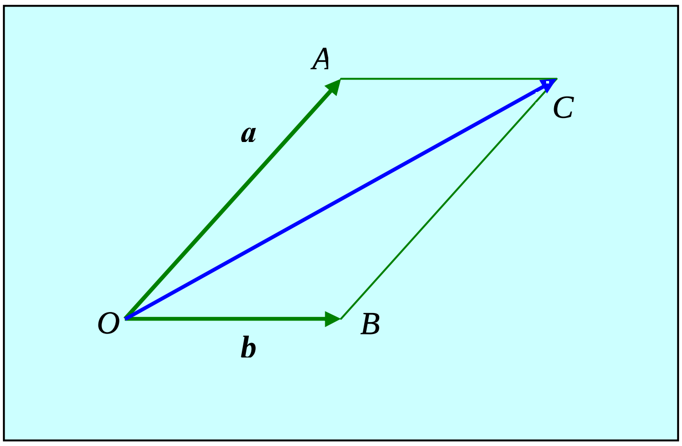

Рис. 4

Из рис. 4 видно, что

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

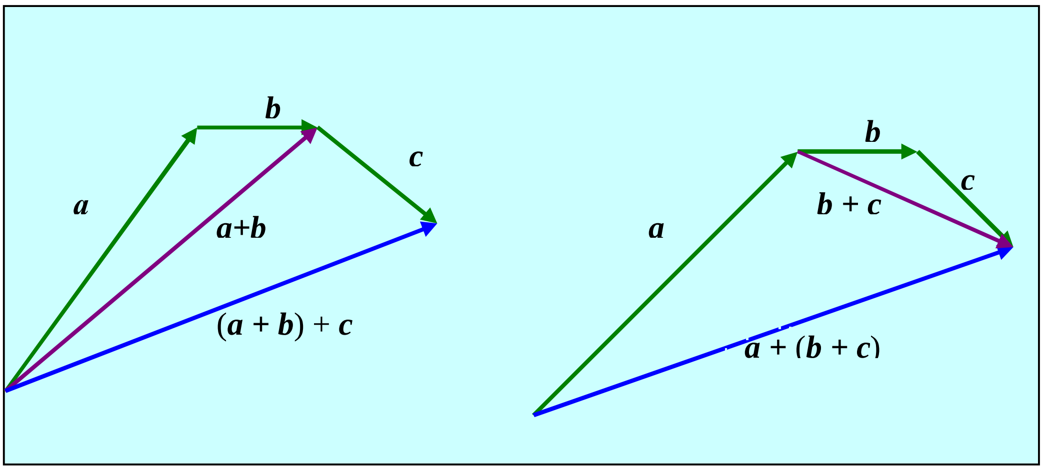

Рис. 5

Таким образом, операция сложения векторов коммутативна:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Имеет место также свойство ассоциативности:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

2. Умножение вектора на число. *Произведением вектора* ***a*** *на число* □ называется вектор □***a*** такой, что:

1. |□***a***| = |□||***a***|.
2. □***a*** || ***a***, и оба вектора одинаково направлены, если □ > 0, и имеют противоположные направления, если □ < 0.

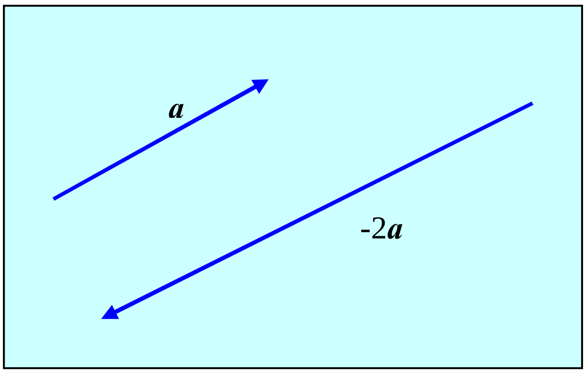

Рис. 6

Таким образом, если ***a*** не равен нулю и ***a*** || ***b***, то найдется число □ такое, что ***b*** =□***a***. Достаточно взять

$$l = e\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|},$$

где □ = 1, если ***a*** и ***b*** одинаково направлены, и □ = -1, если ***a*** и ***b*** имеют противоположные направления.

Отметим основные свойства операции умножения вектора на число, которые непосредственно вытекают из определения этой операции:

1. (□ + □)***a*** = □***a*** + □***a***.
2. □(□***a***) = (□ □)***a***.
3. □(***a*** + ***b***) = □***a*** + □***b***.

3. Вычитание векторов. *Разностью* двух векторов ***a*** и ***b*** называется вектор

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-1)\cdot\boldsymbol{b}.$$

Координаты вектора и точки

Зафиксируем в пространстве некоторую точку *O* и три взаимно перпендикулярных вектора единичной длины ***i***, ***j*** и ***k***.

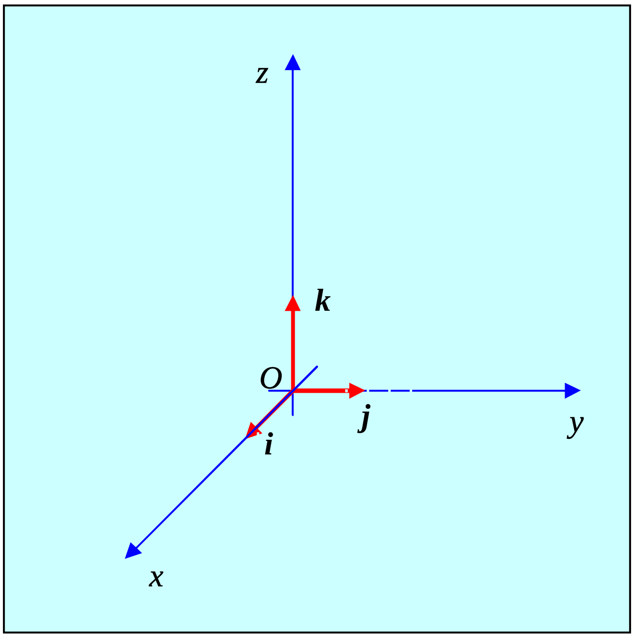

Рис. 7

Совокупность точки *O* и векторов ***i***, ***j***, ***k*** называется *декартовой прямоугольной системой координат*. Прямые, проходящие через точку *O* параллельно векторам ***i***, ***j*** и ***k***, называются *координатными осями* и носят названия осей *абсцисс* (Ox), *ординат* (Oy) и *аппликат* (Oz) соответственно.

Пусть задан вектор ***a***. Совместим его начальную точку с началом координат *O*, а через его конечную точку *A* проведем плоскости, перпендикулярные координатным осям. Пусть эти плоскости пересекают оси Ox, Oy, Oz в точках *L*, *M*, *N* соответственно.

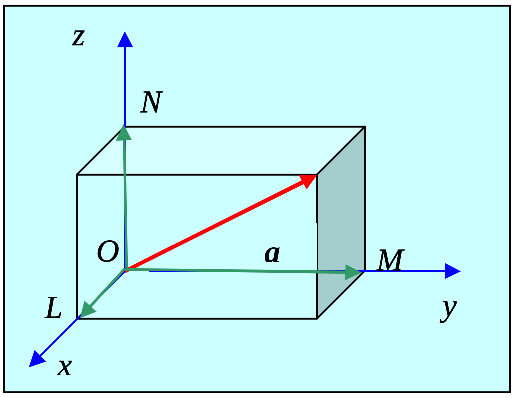

Рис. 8

Нетрудно убедиться, что

$$\overline{OA} = \overline{OL} + \overline{OM} + \overline{ON}.$$

Поскольку вектора $\overline{OL}, \overline{OM}, \overline{ON}$ коллинеарны векторам ***i***, ***j***, ***k*** соответственно, то найдутся числа x_1, y_1, z_1 такие, что

$$\overrightarrow{OL} = x_1\vec{i},\ \overrightarrow{OM} = y_1\vec{j},\ \overrightarrow{ON} = z_1\vec{k}.$$

Следовательно, любой вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

Представление (1) единственно. Действительно, если предположить, что наряду с (1) существует другое представление

$$\boldsymbol{a} = x'_1\boldsymbol{i} + y'_1\boldsymbol{j} + z'_1\boldsymbol{k},$$

то, вычитая это равенство из (7.1), получим

$$0 = (x_1 - x'_1)\boldsymbol{i} + (y_1 - y'_1)\boldsymbol{j} + (z_1 - z'_1)\boldsymbol{k}.$$

Если $x_1 \neq x'_1$, то

$$\vec{i} = -\frac{y_1 - y'_1}{x_1 - x'_1}\vec{j} - \frac{z_1 - z'_1}{x_1 - x'_1}\vec{k},$$

что невозможно, т.к. вектор в правой части лежит в плоскости, параллельной осям Oy и Oz, а вектор $\boldsymbol{i}$ перпендикулярен этой плоскости. Следовательно, $x_1 = x'_1$. Аналогично доказывается, что $y_1 = y'_1$ и $z_1 = z'_1$.

Числа x_1, y_1, z_1 в представлении (1) называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$. Вместе с равенством (1) будет использоваться также запись вида

$$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1).$$

Радиусом-вектором точки A называется вектор, начало которого совпадает с началом координат O, а конец – с точкой A. *Координатами точки A* называются координаты радиус-вектора точки A. При этом, если $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, будем писать

$$A = \{x_1, y_1, z_1\}.$$

Линейные операции над векторами в координатах

1. Сложение векторов. Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, а $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \qquad (2)$$

Доказательство.

Доказательство.

Имеем $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Поэтому

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k} + x_2\,\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\,\boldsymbol{k} = (x_1 + x_2)\,\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\,\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\,\boldsymbol{k}.$

2. Умножение вектора на число. Если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$, то

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1). \qquad (3)$$

Доказательство.
Имеем $\boldsymbol{a} = x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}$. Следовательно,

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(x_1\,\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\,\boldsymbol{k}) = \lambda x_1\,\boldsymbol{i} + \lambda y_1\boldsymbol{j} + \lambda z_1\,\boldsymbol{k}.$$

Из формул (2) и (3) вытекает, что

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2).$$

Пример 1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A = \{\,x_1, y_1, z_1\}$ и $B = \{\,x_2, y_2, z_2\}$. Имеем (см. рис. 9)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

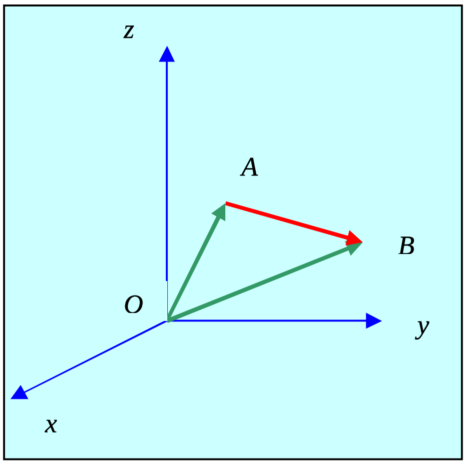

Рис. 9

Проекция вектора на ось

Прямую с заданным на ней направлением будем называть *осью*. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l. Обозначим через C и D проекции точек A и B на ось l (см. рис. 7.10). Тогда *проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось l* $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$ называется величина $|\overrightarrow{CD}|$, если направление оси l совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{CD}$, и – $|\overrightarrow{CD}|$ в противном случае.

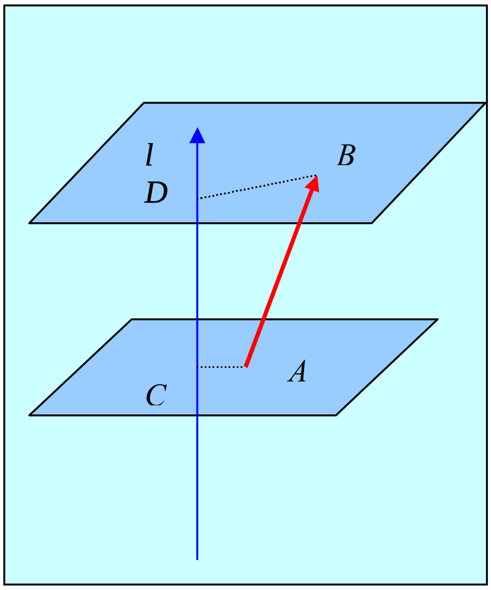

Рис. 10

Если обозначить через α угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l, то

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha. \tag{4}$$

Из определения координат вектора вытекает, что если $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$, то

$$\begin{gathered} x = \text{пр}_{Ox}\boldsymbol{a}, \\ y = \text{пр}_{Oy}\boldsymbol{a} \\ z = \text{пр}_{Oz}\boldsymbol{a}. \end{gathered} \tag{5}$$

Одним из основных свойств проекции вектора на ось является следующее свойство:

$$\boxed{\text{пр}_l (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{пр}_l \boldsymbol{a} + \text{пр}_l \boldsymbol{b}.} \tag{6}$$

Доказательство.
Введем декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с осью l. Тогда, если $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Из равенств (5) имеем

$$x_1 = \text{пр}_l \boldsymbol{a},\ \ x_2 = \text{пр}_l \boldsymbol{b},\ x_1 + x_2 = \text{пр}_l (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Отсюда вытекает справедливость равенства (6).

Через $\text{пр}_c\, \boldsymbol{a}$ будем обозначать проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, задаваемую вектором $\boldsymbol{c}$.

Пусть дан произвольный вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$. Его *ортом* называется вектор единичной длины, коллинеарный $\boldsymbol{a}$ и имеющий с ним одинаковое направление. Из определения умножения вектора на число получаем, что вектор

$$\boxed{\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}}$$

является ортом вектора $\boldsymbol{a}$.

Пусть $\boldsymbol{a} = (x, y, z) \neq 0$. Обозначим через α, β и γ углы, образованные осями Ox, Oy и Oz с вектором $\boldsymbol{a}$. Тогда из (4) и (5) вытекает, что

$$x = |\boldsymbol{a}| \cos \alpha,$$
$$y = |\boldsymbol{a}| \cos \beta,$$
$$z = |\boldsymbol{a}| \cos \gamma,$$

т.е.

$$\boldsymbol{a} = (|\boldsymbol{a}| \cos \alpha, |\boldsymbol{a}| \cos \beta, |\boldsymbol{a}| \cos \gamma) = |\boldsymbol{a}| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \qquad (7)$$

Величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\boldsymbol{a}$.

Скалярное произведение

Пусть даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Обозначим через φ угол между этими векторами. *Скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется величина

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \varphi.}$$

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют *ортогональными* (при этом пишут $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$), если угол между ними прямой. Нулевой вектор считается ортогональным любому. Из определения скалярного произведения вытекает, что

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}}$$

(символом $\Leftrightarrow$ обозначается эквивалентность утверждений).

Остановимся на основных свойствах скалярного произведения.

1. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.
2. $(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$.
3. $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|$ пр$_{\boldsymbol{a}}$ $\boldsymbol{b}$.

4. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}$.

Доказательство.
В силу свойства 3 и (6)

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|(\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}|\ \text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}.$$

5. *Скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{a}$ называется величина $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa}$. Из определения скалярного произведения получаем

$$\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2. \qquad (8)$$

6. Если $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$, то

$$\boxed{\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Доказательство.
Имеем

$$\boldsymbol{ab} = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) = x_1x_2\boldsymbol{i}^2 + y_1x_2\boldsymbol{ji} + z_1x_2\boldsymbol{ki} + x_1y_2\boldsymbol{ij} +$$
$$+ y_1y_2\boldsymbol{j}^2 + z_1y_2\boldsymbol{kj} + x_1z_2\boldsymbol{ik} + y_1z_2\boldsymbol{jk} + z_1z_2\boldsymbol{k}^2.$$

Поскольку $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ik} = \boldsymbol{jk} = 0$, $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$, получаем

$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

7. Если $\boldsymbol{a} = (x,y,z)$, то

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.}$$

Доказательство.
Из свойств 5 и 6 получаем

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Из равенства (7) и свойства 7 вытекает, что направляющие косинусы связаны соотношением

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

8. Если $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$, а φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство.

Из свойств 6 и 7 получаем

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

9. Если $\boldsymbol{a} = (x_1,y_1,z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2,y_2,z_2)$, то

$$\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство.

Обозначим через φ угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Тогда из свойства 8 получаем

$$np_b a = |\vec{a}|\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Рассмотрим выражение $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2$. Имеем

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2.$$

Пользуясь равенством (8) и определением скалярного произведения, получаем

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2, \qquad (9)$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках A, B и C.

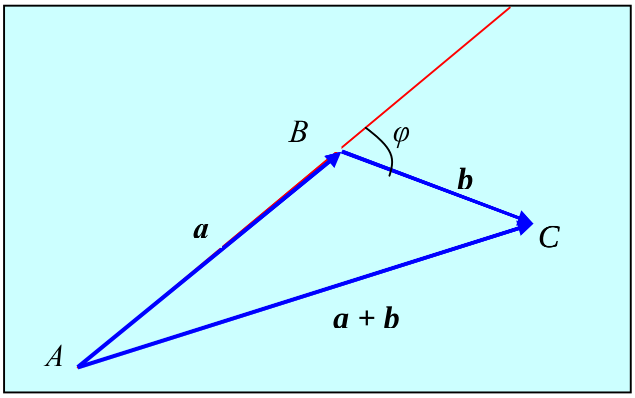

Рис. 11

Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Положим $\alpha = \angle ABC$. В силу того, что $\alpha = \pi - \varphi$, $\cos\alpha = -\cos\varphi$. Поэтому из (9) получаем известную теорему косинусов:

$$|\boldsymbol{AC}|^2 = |\boldsymbol{AB}|^2 - 2|\boldsymbol{AB}|\,|\boldsymbol{AC}|\cos\alpha + |\boldsymbol{BC}|^2.$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника $A = \{1, 1, 2\}$, $B = \{1, 6, 3\}$ и $C = \{4, 5, 2\}$. Найти координаты проекции точки B на сторону AC.

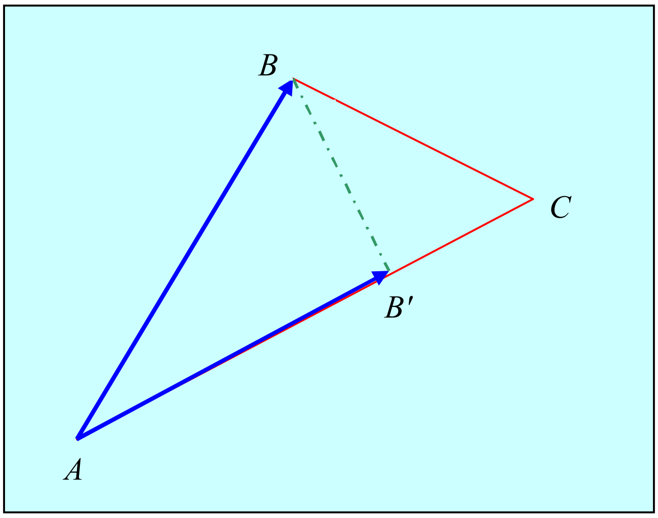

Рис. 12

Обозначим проекцию точки B на сторону AC через B'. Тогда

$$\overrightarrow{AB'} = e_{\overrightarrow{AC}}\, np_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}\,\frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}.$$

Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (0, 5, 1),\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 0),\ |\overrightarrow{AC}| = 5,\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 20.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{4}{5}(3, 4, 0).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB'} = (1, 1, 2) + \frac{4}{5}(3, 4, 0) = \left(\frac{17}{5}, \frac{21}{5}, 2\right).$$

Отсюда

$$B' = \left\{\frac{17}{5}, \frac{21}{5}, 2\right\}.$$

Упражнение 1.
В треугольнике с вершинами в точках $A = \{1, -2, 3\}$, $B = \{2, -2, 3\}$ и $C = \{2,0,3\}$ найти угол между медианой, проведенной из вершины A, и стороной AB.

Решение

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, -2+2, 3-3) = (1, 0, 0).$$

Пусть точка M – середина стороны BC, тогда

$$\boldsymbol{M}=\left\{\frac{2+2}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{3+3}{2}\right\}=\{2,-1,3\},\quad \overrightarrow{\boldsymbol{AM}}=(1,1,0).$$

Найдем косинус искомого угла:

$$\cos j=\frac{1+0+0}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow j=\frac{p}{4}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«Линейные операции над векторами. Скалярное произведение»

Задача 1.
Даны векторы ***a*** = (-2; 3; 5) и ***b*** = (4; -1; 7). Найти координаты вектора 3***a*** – 2***b***.

Указание

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

Решение

3***a*** = (-6; 9; 15), **-2*b*** = (-8; 2; -14).

3***a*** – 2***b*** = 3***a*** + (-2***b***) = (-6 - 8; 9 + 2; 15 – 14) = (-14; 11; 1).

Ответ: 3***a*** – 2***b*** = (-14; 11; 1).

Задача 2.
При каких □ и □ векторы ***a*** = (□; 3; -5) и ***b*** = (1; -2; □) коллинеарны?

Указание

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

Решение

Если ***a*** | | ***b***, то $\frac{a}{1}=\frac{3}{-2}=\frac{-5}{b}$. Отсюда:

1) $\frac{a}{1}=\frac{3}{-2}\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$ 2) $\frac{3}{-2}=\frac{-5}{b}\Rightarrow b=\frac{10}{3}$.

Ответ: $a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{10}{3}$..

Задача 3.

Найти направляющие косинусы вектора ***a*** = {-2; -1; 2}.

Указание

Направляющие косинусы являются координатами орта (единичного вектора) данного направления.

Решение

Найдем модуль вектора ***a***:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Разделив все координаты вектора ***a*** на его модуль, получим координаты орта:

$$\vec{e}_a = \left\{-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$$

Следовательно,

$$\cos a = -\frac{2}{3},\ \cos b = -\frac{1}{3},\ \cos g = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\cos a = -\frac{2}{3}, \cos b = -\frac{1}{3}, \cos g = \frac{2}{3}.$

Задача 4.

Разложить вектор ***d*** = { -6; 0; 13} по базису из векторов ***a*** = {2; -1; 3}, ***b*** = {1; 1; -1}, ***c*** = {-3; 1; 2}.

Указание

Требуется найти такие числа □, □, □, что ***d* =**□***a*** + □***b*** + □***c***. Задайте координаты вектора □***a*** + □***b*** + □***c*** и приравняйте их соответствующим координатам вектора ***d***.

Решение

Требуется найти такие числа □, □, □, что ***d* =**□***a*** + □***b*** + □***c***. Зададим координаты векторов □***a*, **□***b*, **□***c***: *a****a*** = {2□; -□; 3□}, □***b*** = {□; □; -□}, □***c*** = {-3□; □; 2□}.

Тогда □***a*** + □***b*** + □***c*** = {2□ + □- 3□; -□ + □+ □; 3□ - □+ 2□}, причем координаты этого вектора должны равняться соответствующим координатам вектора ***d***. Приравнивая эти координаты, получаем систему уравнений для определения □, □, □:

$$\begin{cases} 2a + b - 3g = -6 \\ -a + b + g = 0 \\ 3a - b + 2g = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - 3g = -6 \\ -3a + 4g = 6 \\ 5a - g = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b - 3g = -6 \\ 17a = 34 \\ 5a - g = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1. \\ g = 3 \end{cases}$$

Следовательно, ***d*** **=** 2***a*** **–** ***b*** + 3***c***.

Ответ: ***d*** **=** 2***a*** **–** ***b*** + 3***c***.

Задача 5.
Для векторов ***a*** = {1; -2; 3}, ***b*** = {-1; 1; -2}, ***c*** = {3; 2; 1}, ***d*** = { 15; 7; 4} найти такие числа □, □, □, чтобы векторы □***a*****,** □***b*****,** □***c*** и ***d*** образовали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

Указание

Для выполнения условия задачи сумма векторов □***a*** + □***b*** **+** □***c*** + ***d*** должна равняться нулю.
Найдите координаты вектора □***a*** + □***b*** **+** □***c*** + ***d*** и приравняйте нулю каждую из них.

Решение

Для выполнения условия задачи сумма векторов □***a*** + □***b*** **+** □***c*** + ***d*** должна равняться нулю.
Найдем координаты вектора □***a*** + □***b*** **+** □***c*** + ***d***:
□***a*** + □***b*** **+** □***c*** + ***d*** = {□ **–** □ + 3□ + 15; 2□ + □ + 2□ + 7; 3□ **-** 2□ + □ +4}.
Следовательно, □, □ и □,должны быть решением системы уравнений

$$\begin{cases} a - b + 3g + 15 = 0 \\ 2a + b + 2g + 7 = 0 \\ 3a - 2b + g + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 3g + 15 = 0 \\ 3b - 4g - 23 = 0 \\ b - 8g - 41 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b + 3g + 15 = 0 \\ 3b - 4g - 23 = 0 \\ -5b + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1\ . \\ g = -5 \end{cases}$$

Ответ: □ = □ = 1, □ = -5.

Задача 6.
Выяснить, является ли система векторов ***a*** = {2; -3; 1}, ***b*** = {3; -1; 5}, ***c*** = {1; -4; 3} линейно зависимой или линейно независимой.

Указание

Система векторов называется линейно независимой, если равенство

□***a*** + □***b*** + □***c*** = 0

верно только при □ = □ = □ = 0.

Решение

Координаты вектора □***a*** + □***b*** + □***c*** имеют вид:

□***a*** + □***b*** + □***c*** = {2□ +3□ + □; -3□ - □ - 4□; □ + 5□ + 3□}.

Вычислим главный определитель Δ системы уравнений

$$\begin{cases} 2a+3b+g=0 \\ -3a-b-4g=0 \\ a+5b+3g=0 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 17 - 3\cdot(-5) + 1\cdot(-4) = 15 \neq 0.$$

По правилу Крамера система имеет единственное решение, но для однородной системы всегда существует нулевое решение (□ = □ = □ = 0). Поскольку других решений нет, данная система векторов линейно независима.

Ответ: система векторов линейно независима.

Задача 7.

Найти координаты какого-либо вектора, направленного по биссектрисе угла между векторами ***a*** = (-4; 3; 0) и ***b*** = (12; -15; 16).

Указание

Диагональ параллелограмма является биссектрисой угла между сторонами только в том случае, если этот параллелограмм – ромб. Следовательно, искомым вектором можно считать сумму двух векторов равной длины, коллинеарных соответственно векторам ***a*** и ***b***.

Решение

*Вектор **a** + **b** направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** как на смежных сторонах и выходящей из общего начала векторов **a** и **b**.*

Диагональ параллелограмма является биссектрисой угла между сторонами только в том случае, если этот параллелограмм – ромб. Следовательно, искомым вектором можно считать сумму двух векторов равной длины, коллинеарных соответственно векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

$|\vec{a}| = \sqrt{16+9} = 5;\ |\vec{b}| = \sqrt{144+225+256} = \sqrt{625} = 25.$

Следовательно, $|5\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. Значит, параллелограмм со сторонами, совпадающими с векторами $5\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, является ромбом, поэтому вектор $5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ будет иметь заданное направление.

$$5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (-20 + 12;\ 15 - 15;\ 0 + 16) = (-8;\ 0;\ 16).$$

Ответ: (-8; 0; 16).

Задача 8.

При каких значениях $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ точки $A(x; -1; 3)$, $B(5; -4; \boldsymbol{z})$, $C(-2; \boldsymbol{y}; 9)$, $D(-5; 1; 7)$ являются вершинами параллелограмма?

Указание

Для выполнения условия задачи требуется коллинеарность векторов $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$.

Решение

Для выполнения условия задачи требуется коллинеарность векторов $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$.

Найдем координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A}; \boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A}; \boldsymbol{z_B} - \boldsymbol{z_A}\} = \{5 - \boldsymbol{x}; -3; \boldsymbol{z} - 3\};$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{DC}} = \{\boldsymbol{x_C} - \boldsymbol{x_D}; \boldsymbol{y_C} - \boldsymbol{y_D}; \boldsymbol{z_C} - \boldsymbol{z_D}\} = \{3; \boldsymbol{y} - 1; 2\}.$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \,||\, \overrightarrow{\boldsymbol{DC}} \Rightarrow \frac{5-\boldsymbol{x}}{3} = \frac{-3}{\boldsymbol{y}-1} = \frac{\boldsymbol{z}-3}{2}.$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} = \{-5 - \boldsymbol{x};\ 2;\ 4\};$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = \{-7;\ \boldsymbol{y} + 4;\ 9 - \boldsymbol{z}\}.$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AD}} \,||\, \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} \Rightarrow \frac{-5-\boldsymbol{x}}{-7} = \frac{2}{\boldsymbol{y}+4} = \frac{4}{9-\boldsymbol{z}}.$$

Из последней пропорции получаем, что $z = 1 - 2y$. Тогда

$$\frac{-3}{\boldsymbol{y}-1} = \frac{1-2\boldsymbol{y}-3}{2} \Rightarrow \boldsymbol{y}^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \pm 2.$$

1) $\boldsymbol{y} = 2;\ \boldsymbol{z} = 1 - 4 = -3;\ \dfrac{5-\boldsymbol{x}}{3} = \dfrac{-3}{2-1} = -3 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 14.$

Но при этих значениях неизвестных

$$\frac{-5-\boldsymbol{x}}{-7} = \frac{-5-14}{-7} = \frac{19}{5} \neq \frac{2}{\boldsymbol{y}+4} = \frac{1}{3}.$$

2) $\boldsymbol{y}=-2;\ \boldsymbol{z}=1+4=5;\ \dfrac{5-\boldsymbol{x}}{3}=\dfrac{-3}{-2-1}=1\Rightarrow \boldsymbol{x}=2.$

$\dfrac{-5-\boldsymbol{x}}{-7}=\dfrac{-5-2}{-7}=1=\dfrac{2}{\boldsymbol{y}+4}$ –
условие задачи выполнено.

Ответ: $x = 2$, $y = -2$, $z = 5$.

Задача 9.
Найти скалярное произведение ($\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$)(2$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$), если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, а угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 120°.

Указание

Используйте определение скалярного произведения:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Решение

Используем свойства скалярного произведения:
$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{aa} - 2\boldsymbol{ba} + \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{bb} = 2|\boldsymbol{a}|^2 - \boldsymbol{ab} - |\boldsymbol{b}|^2.$
По определению скалярного произведения

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi = 2\cdot3\cdot(-½) = -3.$$

Тогда $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2\cdot4 - (-3) - 9 = 8.$

Ответ: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 8.$

Задача 10.
Известно, что $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 0$. Найти $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$.

Указание

Вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ – нулевой, поэтому его скалярное произведение с любым вектором равно нулю. Умножьте скалярно вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ сначала на $\boldsymbol{a}$, затем на $\boldsymbol{b}$ и на $\boldsymbol{c}$.

Решение

Вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ – нулевой, поэтому его скалярное произведение с любым вектором равно нулю. Умножим скалярно вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ сначала на $\boldsymbol{a}$, затем на $\boldsymbol{b}$ и на $\boldsymbol{c}$. Получим:

$$\begin{cases} \vec{a}\vec{a}+\vec{b}\vec{a}+\vec{c}\vec{a}=0\\ \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{b}+\vec{c}\vec{b}=0\\ \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{c}=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}|^2+\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{a}=0\\ \vec{a}\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\vec{c}=0\\ \vec{c}\vec{a}+\vec{b}\vec{c}+|\vec{c}|^2=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 9+\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{a}=0\\ \vec{a}\vec{b}+1+\vec{b}\vec{c}=0.\\ \vec{c}\vec{a}+\vec{b}\vec{c}+1=0 \end{cases}$$

Сложим левые и правые части полученных равенств:

$11 + 2\boldsymbol{ab} + 2\boldsymbol{bc} + 2\boldsymbol{ca} = 0$, откуда $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca} = -5,5$.

Ответ: $\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{ca} = -5,5$.

Задача 11.
Даны векторы $\boldsymbol{a} = \{2; -3; 1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{-1; 2; 1\}$. Найти скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})$.

Указание

Найдите координаты векторов $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ или используйте свойства скалярного произведения.

Решение

1-й способ.
Найдем координаты векторов $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$:
$3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{3\cdot2 + 1; 3\cdot(-3) - 2; 3\cdot1 - 1\} = \{7; -11; 2\}$;
$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = \{2 + 2\cdot(-1); -3 + 2\cdot2; 1 + 2\cdot1\} = \{0; 1; 3\}$.
Тогда $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 7\cdot0 - 11\cdot1 + 2\cdot3 = -5$.

2-й способ.
Используем свойства скалярного произведения:
$(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\boldsymbol{aa} - \boldsymbol{ba} + 6\boldsymbol{ab} - 2\boldsymbol{bb} = 3|\boldsymbol{a}|^2 + 5\boldsymbol{ab} - 2|\boldsymbol{b}|^2$.
$|\boldsymbol{a}|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 1^2 = 14$;
$|\boldsymbol{b}|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6$;
$\boldsymbol{ab} = 2\cdot(-1) - 3\cdot2 + 1\cdot1 = -7$;
$(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\cdot14 + 5\cdot(-7) - 2\cdot6 = -5$.

Ответ: $(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = -5$.

Задача 12.
Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{a} = \{2; -2; -1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{-6; 3; 2\}$.

Указание

Используйте формулу, выражающую косинус угла между векторами через их скалярное произведение.

Решение

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+4+1} = 3;$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{36+9+4} = 7;$$
$$\vec{a}\vec{b} = 2(-6) - 2\cdot3 - 1\cdot2 = -20;$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-20}{3\cdot7} = -\frac{20}{21}.$$

Ответ: $-\dfrac{20}{21}$.

Задача 13.

Найти вектор ***b***, если *a* = {2; -2; 3}, ***b*** || ***a*** и ***ab*** = -51.

Указание

Координаты вектора ***b*** пропорциональны координатам ***a***. Если ***k*** – коэффициент пропорциональности, то ***b*** = {2*k*; -2*k*; 3*k*}.

Решение

Координаты вектора ***b*** пропорциональны координатам ***a***. Если ***k*** – коэффициент пропорциональности, то ***b*** = {2*k*; -2*k*; 3*k*}.

Тогда ***ab*** = 2·2*k* – 2(-2*k*) + 3·3*k* = 17*k* = -51, откуда *k* = -3, ***b*** = {-6; 6; -9}.

Ответ: ***b*** = {-6; 6; -9}.

Задача 14.

Известно, что |***a***| = 2, |***b***| = 7. Найти значения ***k***, при которых векторы ***a + kb*** и ***a - kb*** перпендикулярны.

Указание

Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Решение

Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

$$(\vec{a}+k\vec{b})(\vec{a}-k\vec{b})=\vec{a}\vec{a}+k\vec{b}\vec{a}-k\vec{a}\vec{b}-k^2\vec{b}\vec{b}=$$

$$=|\vec{a}|^2-k^2|\vec{b}|^2=0\Rightarrow k^2=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}=\frac{4}{9},\quad k=\pm\frac{2}{7}.$$

Ответ: $k = \pm\dfrac{2}{7}$.

Задача 15.

Найти проекцию вектора ***a*** = {7; 0; -5} на ось, образующую с координатными осями *Ox* и *Oy* углы 60° и 45°, а с осью *Oz* – тупой угол γ.

Указание

Используйте свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Решение

Найдем $\cos\gamma$: $\cos^2 60^o + \cos^2 45^o + \cos^2\gamma = 1$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 g = 1,\ \cos^2 g = \frac{1}{4},$$

$$\cos g < 0 \Rightarrow \cos g = -\frac{1}{2}.$$

Тогда проекция ***a*** на заданную ось равна:

$$\boldsymbol{x}_a \cos a + \boldsymbol{y}_a \cos b + \boldsymbol{z}_a \cos g = 7\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 6.$$

Ответ: 6.

2.1.2. *Векторное и смешанное произведения*

Векторное произведение

Векторным произведением векторов ***a*** и ***b*** называется вектор [***a***,***b***] такой, что:

1. |[***a***,***b***]| = |***a***||***b***| sin □, где □ – угол между векторами ***a*** и ***b***.
2. [***a***,***b***] □ ***a***, [***a***,***b***] □ ***b***.
3. Вектор [***a***,***b***] направлен так, что из конца этого вектора кратчайший поворот от вектора ***a*** к вектору ***b*** происходит против часовой стрелки.

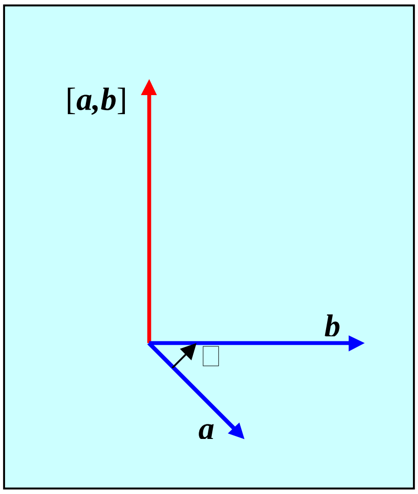

Рис. 1

Из п.1 определения векторного произведения вытекает, что

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}.$$

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1. |[***a*,*b***]| = S_{ab} , где S_{ab} – площадь параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b***.

Доказательство.

Если □ - угол между векторами ***a*** и ***b***, то (см. рис. 2)

$$S_{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin j = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]|.$$

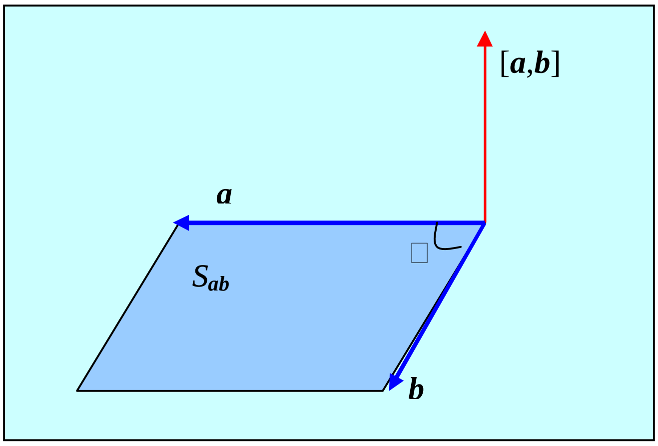

Рис.2

2. |[***a*,*b***]| = – |[***b*,*a***]|.
3. |[□***a*,*b***]| = □|[***a*,*b***]|.

Числовой множитель можно выносить и из второго множителя. Действительно,

$$|[\mathbf{a}, □\mathbf{b}]| = -|[□\mathbf{b},\mathbf{a}]| = -□|[\mathbf{b},\mathbf{a}]| = □|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|.$$

4. [***a*** + ***b***, ***c***] = [***a*,*c***] + [***b*,*c***].

Доказательство этого свойства будет дано в следующем пункте.

Пример 1. Вычислим произведение [***a*** + ***b***, ***a*** – ***b***]. Пользуясь тем, что [***a***, ***a***] = [***b*,*b***] = 0 (как произведение коллинеарных векторов), будем иметь:

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = [\mathbf{b},\mathbf{a}] - [\mathbf{a},\mathbf{b}] = 2[\mathbf{b},\mathbf{a}].$$

Отсюда

$$S_{ab} = ½\, |[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]| = ½\, |\mathbf{a} + \mathbf{b}||\mathbf{a} - \mathbf{b}| \sin □,$$

где □ – угол между векторами ***a*** + ***b*** и ***a*** – ***b***.

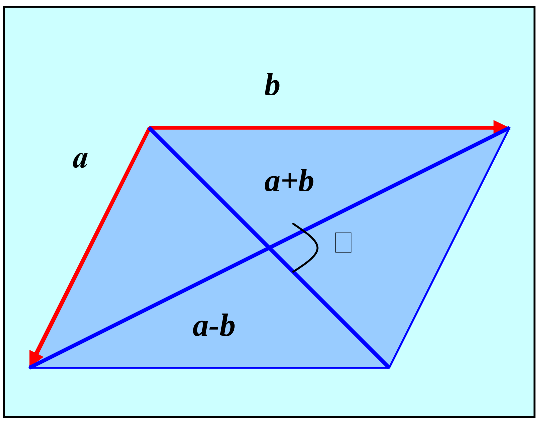

Рис. 3

Тем самым доказано, что площадь параллелограмма равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними.

Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется величина

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$$

(скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$).

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, параллельная им.

Из определения векторного произведения вытекает, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны в том и только в том случае, если $\boldsymbol{a}$ □ $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$. Тем самым

$$\boldsymbol{abc} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ компланарны.}$$

Тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называется *правой*, если угол меду векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ – острый. В противном случае тройка называется *левой*. Множество всех систем декартовых прямоугольных координат распадается на два класса. Один класс – правые системы координат, в которых тройка базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – правая, другой класс – левые системы координат, в которых тройка базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – левая.

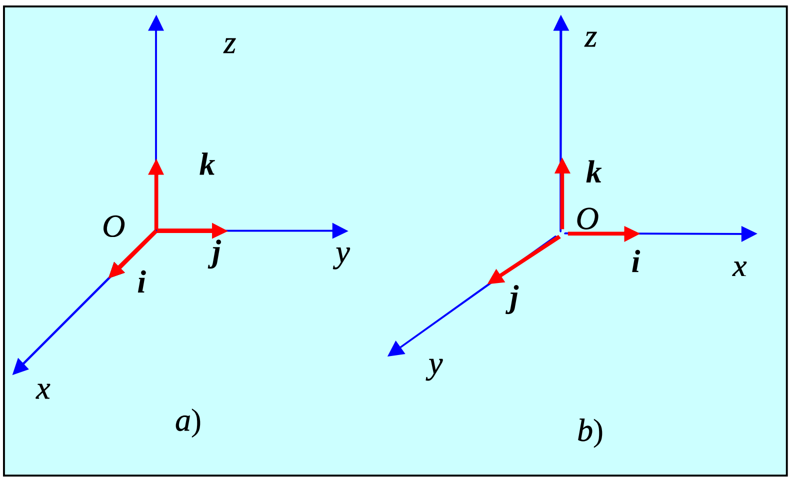

Рис. 4

На рис. 4 *a*) – правая система координат, а *b*) – левая система координат.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1. Для некомпланарных векторов

$$\mathbf{abc} = \begin{cases} V_{abc}, \ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \ - \ \textit{правая тройка}, \\ -V_{abc}, \ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \ - \ \textit{левая тройка}, \end{cases}$$

где V_{abc} – объем параллелепипеда, построенного на векторах ***a***, ***b*** и ***c***.

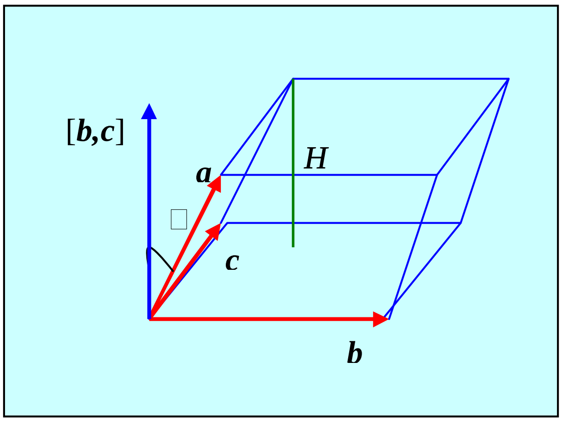

Рис. 5

Доказательство.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах ***a***, ***b*** и ***c***, равен произведению площади основания |[***b***,***c***]| на высоту H = |***a***||cos θ|, где θ - угол между векторами ***a*** и [***b***,***c***] (см. рис. 8.5). Поэтому

$$V = |[\mathbf{b},\mathbf{c}]| \, |\mathbf{a}| \, |\cos\theta| = |\mathbf{abc}|.$$

Знак смешанного произведения совпадает со знаком cos θ, который положителен, если тройка правая, и отрицателен в противном случае.

2. Для любых векторов ***a***, ***b*** и ***c***

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\,\boldsymbol{acb} = -\,\boldsymbol{cba} = -\,\boldsymbol{bac}.$$

Доказательство.

Из предыдущего свойства вытекает, что при перестановке сомножителей в смешанном произведении может измениться лишь знак произведения. Остается заметить, что тройки, получаемые по схеме из рис. 8.6 (начиная с любого вектора), имеют одинаковую ориентацию. При движении по этой схеме в противоположном направлении ориентация меняется.

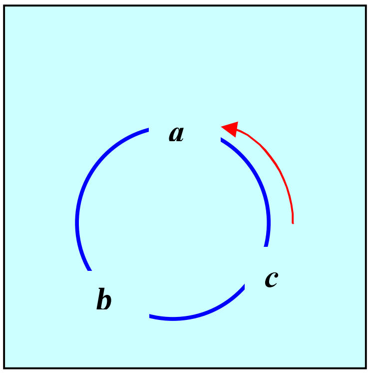

Рис. 6

3. $(\square_1 \boldsymbol{a}_1 + \square_2 \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{bc} = \square_1 \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \square_2 \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc}$.

Доказательство.

Пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем:

$$(l_1\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2)\mathbf{bc} = (l_1\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2)[\mathbf{b},\mathbf{c}] =$$
$$= l_1\mathbf{a}_1[\mathbf{b},\mathbf{c}] + l_2\mathbf{a}_2[\mathbf{b},\mathbf{c}] = l_1\mathbf{a}_1\mathbf{bc} + l_2\mathbf{a}_2\mathbf{bc}.$$

Аналогичное свойство имеет место для остальных множителей:

$$\boldsymbol{a}(\square_1 \boldsymbol{b}_1 + \square_2 \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{c} = \square_1 \boldsymbol{ab}_1\boldsymbol{c} + \square_2 \boldsymbol{ab}_2\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{ab}(\square_1 \boldsymbol{c}_1 + \square_2 \boldsymbol{c}_2) = \square_1 \boldsymbol{abc}_1 + \square_2 \boldsymbol{abc}_2.$$

Доказательство.

Имеем

$$\mathbf{a}(l_1\mathbf{b}_1 + l_2\mathbf{b}_2)\mathbf{c} = -(l_1\mathbf{b}_1 + l_2\mathbf{b}_2)\mathbf{ac} =$$
$$= -l_1\mathbf{b}_1\mathbf{ac} - l_2\mathbf{b}_2\mathbf{ac} = l_1\mathbf{ab}_1\mathbf{c} + l_2\mathbf{ab}_2\mathbf{c}.$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Докажем теперь свойство 4 векторного произведения, т.е. равенство

$$[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}].$$

Доказательство.

Из свойства 3 смешанного произведения вытекает, что для любого вектора $\boldsymbol{e}$

$$\mathbf{e}[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{e}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{eac} + \mathbf{ebc} =$$
$$= \mathbf{e}[\mathbf{a},\mathbf{c}] + \mathbf{e}[\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{e}([\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]).$$

Выбирая в качестве $\boldsymbol{e}$ векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, получаем, что координаты векторов $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ совпадают. Из этого следует, что эти векторы равны.

Векторное и смешанное произведения векторов, заданных координатами

Пусть $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Тогда

$$[\mathbf{ab}] = [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] =$$
$$= x_1x_2[\mathbf{i},\mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i},\mathbf{j}] + x_1z_2[\mathbf{i},\mathbf{k}] + y_1x_2[\mathbf{j},\mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j},\mathbf{j}] +$$
$$+ y_1z_2[\mathbf{j},\mathbf{k}] + z_1x_2[\mathbf{k},\mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k},\mathbf{j}] + z_1z_2[\mathbf{k},\mathbf{k}].$$

Будем считать, что система координат правая. Тогда

$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}.$$

Учитывая, что при перемене множителей векторное произведение меняет знак, получаем

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i} =$$
$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}. \qquad (1)$$

Формулу (1) удобно записать в виде символического определителя

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(для получения формулы надо раскрыть определитель по первой строке).

Пример 2.

Найдем площадь треугольника с вершинами в точках $A = \{2, 2, -3\}$, $B = \{1, 3, -3\}$ и $C = \{1, 2, -1\}$. Площадь этого треугольника S равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах AB и AC. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} S_{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|.$$

Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0), \quad \overrightarrow{AC} = (-1,0,2).$$

Поэтому

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = \frac{3}{2}.$$

Упражнение 1.

При каких значениях □ и □ вектор □ $\boldsymbol{i}$ + □ $\boldsymbol{j}$ + $\boldsymbol{k}$ будет коллинеарен вектору $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, если $\boldsymbol{a} = (2, -1, 1)$, а $\boldsymbol{b} = (1, 2, -2)$?

Решение.

Найдем координаты вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0,5,5).$$

Поскольку координаты коллинеарных векторов пропорциональны, числа □ и □ должны удовлетворять равенствам

$$\frac{a}{0} = \frac{b}{5} = \frac{1}{5},$$

откуда □ = 0, □ = 1.

Пусть теперь ***a*** = (x_1, y_1, z_1), ***b*** = (x_2, y_2, z_2), а ***c*** = ***a*** = (x_3, y_3, z_3). Тогда

$$\mathbf{abc} = \mathbf{a}[\mathbf{b},\mathbf{c}] = x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Тем самым смешанное произведение векторов вычисляется по формуле

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Выясним, какую тройку: правую или левую – образуют векторы ***a*** = (1, 1, 0), ***b*** = (-1, 2, 1) и ***c*** = (-3, -2, 0). Для этого найдем смешанное произведение

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Из того, что ***abc*** < 0, вытекает, что тройка ***a***, ***b***, ***c*** – левая.
Упражнение 2.
При каком □ векторы ***a*** = (-1, 1, □), ***b*** = (2, 1, 0) и ***c*** = (3, 1, 1) являются компланарными?
Решение.

Смешанное произведение компланарных векторов равно нулю, поэтому

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 3 = 0,$$

откуда □ = -3.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Векторное и смешанное произведения*»

Задача 1.
Найти модуль вектора [***a*** – 3***b***, 2***a*** + ***b***], если |***a***| = 6, |***b***| = 7, а угол между векторами **a** и ***b*** равен 30°.

Указание

Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, поэтому

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = 0.$$

Операция векторного умножения некоммутативна,

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

Решение

Используя свойства векторного произведения, получим:

$[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - 6[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - 3[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = 2\cdot 0 + 6[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - 3\cdot 0 =$
$= 7[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Следовательно, $|[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]| = 7|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 7\, |\boldsymbol{a}|\, |\boldsymbol{b}| \sin \varphi = 7\cdot 6\cdot 7\cdot 0{,}5 = 147$.

Ответ: $|[\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]| = 147$.

Задача 2.

Известно, что $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 10$ и $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 12$. Найти скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$.

Указание

Поскольку $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}|\, |\boldsymbol{b}| \sin$ □, можно найти sin □, а затем с помощью основного тригонометрического тождества вычислить cos □.

Решение

Поскольку $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}|\, |\boldsymbol{b}| \sin$ □, где □ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, получаем:

$12 = 2\cdot 10\cdot \sin$ □, откуда sin □ = 0,6. Тогда $\cos^2$□ = 1 – $\sin^2$□ = 0,64.

Если угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острый, то cos □ = 0,8, и $\boldsymbol{ab} = 2\cdot 10\cdot 0{,}8 = 16$; если же этот угол тупой, то cos □ = -0,8, и $\boldsymbol{ab} = -16$.

Ответ: $\boldsymbol{ab} = \pm 16$.

Задача 3.

Найти координаты векторного произведения векторов $\boldsymbol{a} = \{3; 2; 1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{-1; 1; -2\}$.

Указание

Воспользуйтесь формулами для координатной записи векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left\{\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}3 & 1\\-1 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}3 & 2\\-1 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{-5;5;5\}.$$

Ответ: [***a***,***b***] = {-5; 5; 5}.

Задача 4.
Даны точки $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти площадь треугольника ABC.

Указание

Рассмотрите векторы

$$\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)\quad и\quad \overrightarrow{AC}=(0;4;-3).$$

Модуль векторного произведения [*AB*, *AC*] равен площади параллелограмма *ABMC*, построенного на них как на смежных сторонах, а площадь треугольника *ABC* равна половине площади *ABMC*.

Решение

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)\quad и\quad \overrightarrow{AC}=(0;4;-3).$$

Модуль векторного произведения [*AB*, *AC*] равен площади параллелограмма *ABMC*, построенного на них как на смежных сторонах, а площадь треугольника *ABC* равна половине площади *ABMC*.

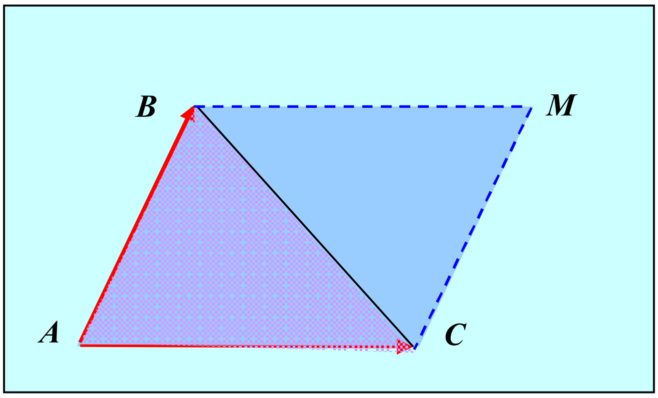

Рис. 7

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left\{\begin{vmatrix}-5 & 0\\0 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & 0\\0 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}4 & -5\\0 & 4\end{vmatrix}\right\}=\{15;\ 12;\ 16\}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\sqrt{625}=25,$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 25=12,5.$$

Ответ: 12,5.

Задача 5.
Даны векторы ***a*** = {4; -1; 2} и ***b*** = {1; 1; -3}. Найти координаты векторного произведения [***a*** – 4***b***, ***b***].

Указание

Воспользуйтесь тем, что
$$\left[\vec{a}-4\vec{b},\vec{b}\right]=[\vec{a},\vec{b}]-4[\vec{b},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]-4\cdot 0.$$

Решение

$$\left[\vec{a}-4\vec{b},\vec{b}\right]=[\vec{a},\vec{b}]-4[\vec{b},\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]-4\cdot 0=[\vec{a},\vec{b}]=$$
$$=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{1;\ 14;\ 5\}.$$

Ответ: {1; 14; 5}.

Задача 6.
Даны векторы ***a*** = {2; -1; 1}, ***b*** = {3; 3; 4} и ***c*** = {2; 0; 2}. Найти координаты вектора ***d***, если известно, что он перпендикулярен векторам ***a*** и ***b***, а скалярное произведение ***dc*** = -8.

Указание

Векторное произведение [***a, b***] перпендикулярно обоим сомножителям, то есть [***a, b***] перпендикулярен ***a*** и ***b***.

Решение

Векторное произведение [***a, b***] перпендикулярно обоим сомножителям, то есть [***a, b***] перпендикулярен ***a*** и ***b***.
Следовательно, вектор ***d*** || [***a***,***b***], поэтому координаты вектора ***d*** пропорциональны координатам [***a***,***b***].
$$[\vec{a},\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\right\}=\{-7;\ -5;\ 9\}.$$
Пусть ***d*** = {-7*k*; -5*k*; 9*k*}, тогда ***dc*** = -7*k* ·2 + 9*k* ·2 = 4*k* = -8.
Следовательно, *k* = -2, и ***d*** = {14; 10; -18}.

Ответ: ***d*** = {14; 10; -18}.

Задача 7.
Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках *A*(2; 2; 2), *B*(3; 1; 5), *C*(0; 4; 3), *D*(5; 0; 7).

Указание

Модуль смешанного произведения векторов *AB*, *AC*, *AD* равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах.

Решение

Модуль смешанного произведения векторов *AB*, *AC*, *AD* равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на смежных ребрах. У треугольной пирамиды *ABCD* высота равна высот параллелепипеда, а площадь основания вдвое меньше площади основания параллелепипеда. Поэтому

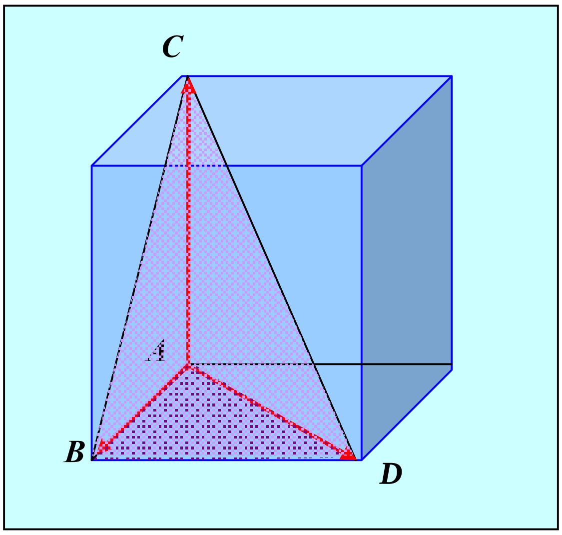

Рис. 8

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} S_{ABPC} h = \frac{1}{6} V_{пар} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{CB}\right|.$$

$$\overrightarrow{AB} = \{1;\ -1;\ 3\},\quad \overrightarrow{AC} = \{-2;\ 2;\ 1\},\quad \overrightarrow{AD} = \{3;-2;\ 5\}.$$

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7;\ V_{ABCD} = \frac{1}{6}|-7| = \frac{7}{6}.$$

Ответ: $\frac{7}{6}$.

2.2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

2.2.1. *Уравнение прямой на плоскости*

Общее уравнение прямой на плоскости

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \qquad (1)$$

задает множество точек L на плоскости, если для любой точки $M \in L$ ее координаты удовлетворяют равенству (1), и наоборот, если для всех пар (x,y), удовлетворяющих (1), точка $M = \{x, y\}$ принадлежит множеству L. При этом говорят, что уравнение (1) является уравнением множества L.

Пусть на плоскости дана точка $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Найдем уравнение прямой L, проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (A, B)$. Пусть $M = \{x, y\}$ – произвольная точка на прямой L. Тогда

$$\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{L} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{MM}_0} \perp \mathrm{n} \Leftrightarrow \mathrm{n}\overline{\boldsymbol{MM}_0} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) = 0.$$

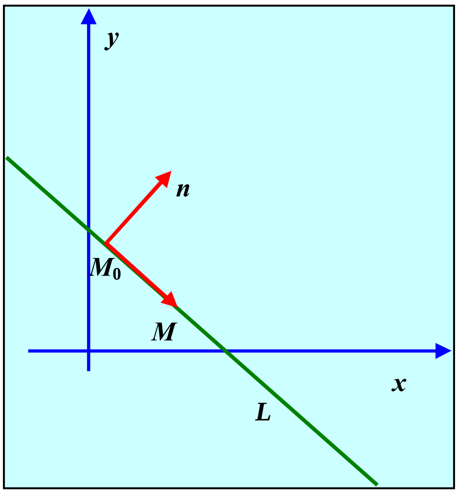

Рис. 1

Тем самым уравнение прямой L задается в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C} = 0, \qquad (2)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Нормальным вектором прямой называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой.

Пример 1. Найдем уравнение прямой с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = (-3, 2)$, проходящей через точку $M_0 = \{2, 1\}$. Имеем

$$-3(x - 2) + 2(y - 1) = 0$$

или

$$-3x + 2y + 4 = 0.$$

Теорема 9.1. Всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C} = 0, \quad \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 \neq 0, \qquad (3)}$$

и любое уравнение (3) задает на плоскости некоторую прямую. При этом вектор $\boldsymbol{n} = (A, B)$ является нормальным вектором этой прямой.

Доказательство.

Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Пусть $\boldsymbol{n} = (A, B)$ – некоторый нормальный вектор этой прямой. Тогда, как было показано выше, уравнение этой прямой запишется в виде (3).

Покажем, что всякое уравнение (3) определяет некоторую прямую на плоскости. Найдем точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{C} = 0.$$

Если $A \neq 0$, то, например, можно положить

$$\boldsymbol{x}_0 = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{y}_0 = 0.$$

А если $B \neq 0$, то

$$\boldsymbol{x}_0 = 0, \quad \boldsymbol{y}_0 = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{B}}.$$

Теперь построим прямую с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = (A, B)$, проходящую через точку M_0. Ее уравнение будет иметь вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) = 0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению (3).

Уравнение (3) называется *общим уравнением прямой* на плоскости.

9.2. Неполные уравнения прямой

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) равен нулю, то такое уравнение называется *неполным*.

1. Предположим, что $C = 0$, т.е. уравнение прямой задается в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = 0.$$

   Такая прямая (см. рис. 2) проходит через начало координат, так как координаты точки $O = \{0,0\}$ удовлетворяют уравнению этой прямой.

2. Пусть $A = 0$ (при этом $B \neq 0$). Тогда прямая (см. рис. 3) параллельна оси Ox, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (0, B)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{i}$. Ее уравнение может быть записано в виде

$$\boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{B}}.$$

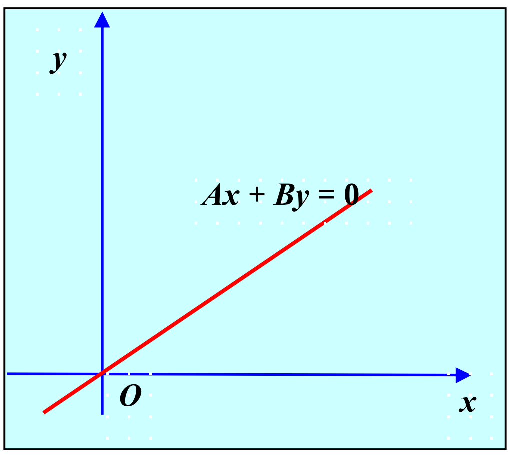

Рис. 2

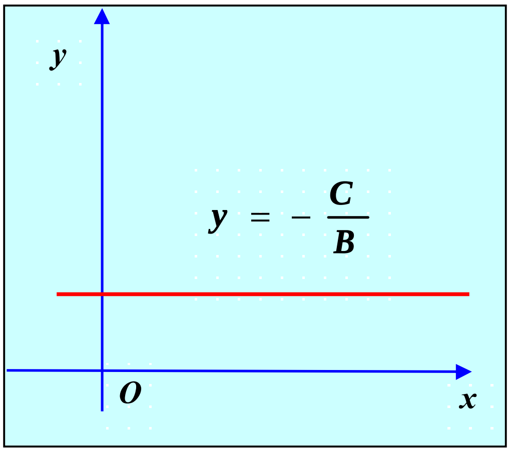

Рис. 3

3. Пусть $B = 0$ (при этом $A \neq 0$). Тогда прямая (см. рис. 4) параллельна оси Oy, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A,0)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{j}$. Ее уравнение может быть записано в виде

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}}.$$

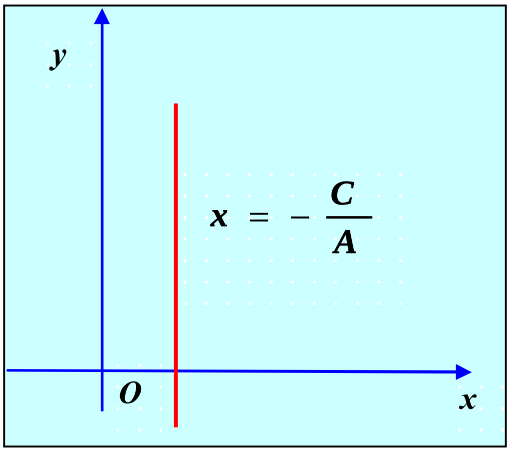

Рис. 4

Уравнение прямой в отрезках

Предположим, что все коэффициенты в уравнении прямой (3) отличны от нуля. Тогда, перенеся C в правую часть равенства и разделив обе части равенства на $-C$, получим уравнение

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{q}} = 1, \qquad (4)$$

где p = -C/A, а q = -C/B. Уравнение (9.4) называется уравнением прямой *в отрезках*. Числа p и q имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях. Поэтому уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения графика прямой.

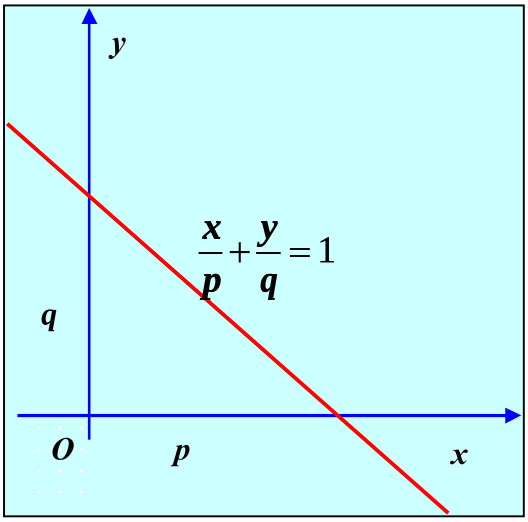

Рис. 5

Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть заданы уравнения двух прямых

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2)$ являются нормальными векторами для прямых L_1 и L_2 соответственно.

1. Условие параллельности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно пропорциональности координат этих векторов. Таким образом,

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.}$$

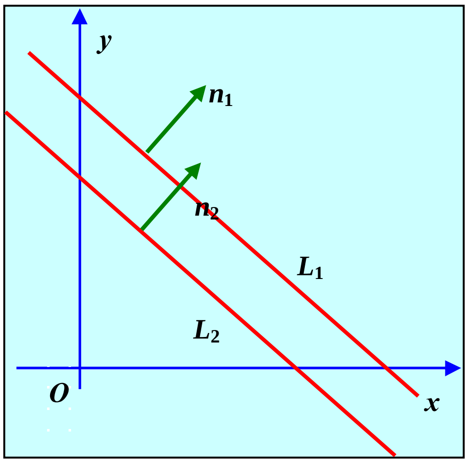

Рис. 6

2. Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно равенству нулю скалярного произведения этих векторов. Таким образом,

$$\boxed{\boldsymbol{L}_1 \perp \boldsymbol{L}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2 = 0.}$$

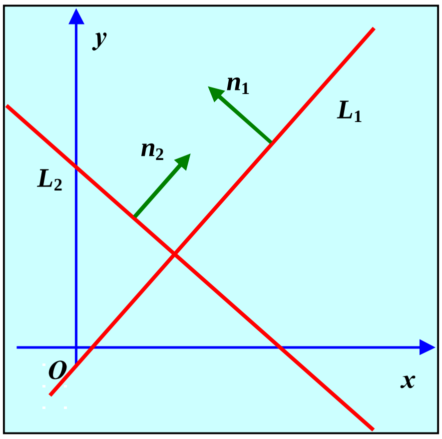

Рис. 7

3. Нахождение угла □ между прямыми L_1 и L_2 сводится к нахождению угла между нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Имеем

$$\cos j = \frac{n_1 n_2}{|n_1|\,|n_2|}.$$

Тем самым

$$\boxed{\cos j = \frac{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2}{\sqrt{\boldsymbol{A}_1^2 + \boldsymbol{B}_1^2}\sqrt{\boldsymbol{A}_2^2 + \boldsymbol{B}_2^2}}.}$$

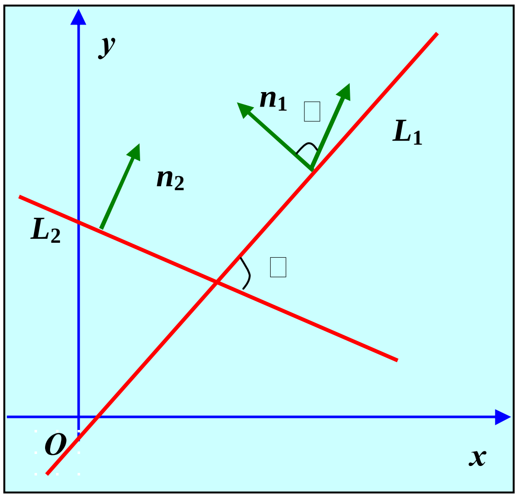

Рис. 8

Пример 2. Найдем угол между прямыми

$$L_1: \quad 3\boldsymbol{x}+\sqrt{3}\boldsymbol{y}+1=0,$$
$$L_2: \quad \boldsymbol{x}+\sqrt{3}\boldsymbol{y}-4=0.$$

Имеем

$$n_1=(3,\sqrt{3}), \quad n_2=(1,\sqrt{3}).$$

Следовательно,

$$\cos j=\frac{3+3}{\sqrt{12}\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, угол между прямыми равен 30^{o}.

Упражнение 1. При каких значениях параметра a прямые

$$L_1: \quad (\boldsymbol{a}+1)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}-3=0,$$
$$L_2: \quad \boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}+4=0,$$

a) параллельны, b) перпендикулярны?

Решение.

Нормальные векторы прямых $\boldsymbol{n}_1 = (a + 1, 2)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1,-2a)$.

a) условие параллельности:

$$\frac{\boldsymbol{a}+1}{1}=\frac{2}{-2\boldsymbol{a}},-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}=1, \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}+1=0-$$

решений нет, следовательно, прямые не могут быть параллельными ни при каком значении a.

b) условие пепрпендикулярности:

$$(\boldsymbol{a}+1)\cdot 1+2(-2\boldsymbol{a})=0, 1-3\boldsymbol{a}=0, \boldsymbol{a}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: параллельность невозможна; прямые перпендикулярны при $a = \frac{1}{3}$.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим* вектором прямой. Найдем уравнение прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{a} = (l, m)$, проходящей через точку $M_0 = \{x_0, y_0\}$. Пусть $M = \{x, y\}$ – произвольная точка на искомой прямой L. Тогда

$$\boldsymbol{M}\in \boldsymbol{L} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_0} \parallel \mathrm{a}.$$

Условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_0}$ и $\boldsymbol{a}$ записывается как пропорциональность их координат:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{m}}. \qquad (5)}$$

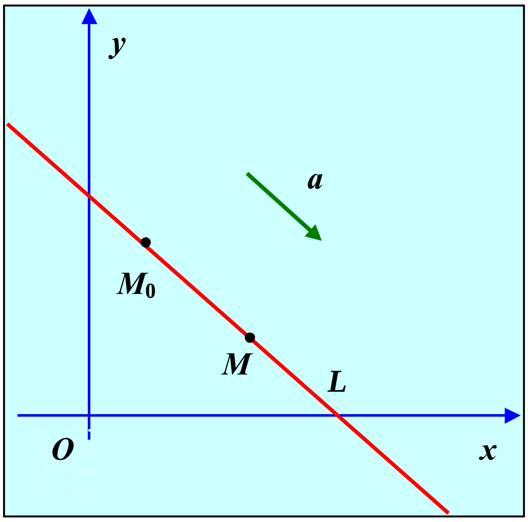

Рис. 9

Уравнение прямой, записанное в виде (5), называется *каноническим уравнением прямой* на плоскости.

Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_0 = \{x_0, y_0\}$ и $M_1 = \{x_1, y_1\}$. Для этого достаточно взять в качестве направляющего вектора вектор

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Тогда искомое уравнение будет иметь вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \qquad (6)$$

Пример 3. Даны координаты вершин треугольника $A = \{1,3\}$, $B = \{1,4\}$ и $C = \{5,3\}$. Найти уравнение прямой, на которой лежит медиана этого треугольника, проведенная из вершины B на сторону AC.

Найдем сначала координаты точки M, являющейся серединой стороны AC. Имеем

$$M = \left\{\frac{1+5}{2}, \frac{3+3}{2}\right\} = \{3, 3\}.$$

Далее строим прямую, проходящую через точки B и M, используя уравнение (9.6):

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{3-4}.$$

Тем самым искомая прямая задается уравнением

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-1} \quad или \quad x + 2y - 9 = 0.$$

Упражнение 2. Даны координаты вершин треугольника A = {1,1}, B = {1,2} и C = {5,1}. Найти уравнение прямой, на которой лежит высота этого треугольника, проведенная из вершины B на сторону AC.

Решение.

Направляющим вектором прямой AC можно считать вектор

$$\overrightarrow{AC} = (5-1, 1-1) = (4,0).$$

Тогда направляющим вектором высоты будет ортогональный ему вектор, например, $\boldsymbol{a}$ = (0,1). Следовательно, уравнение высоты как прямой, проходящей через точку B с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ можно задать в виде (9.5):

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} \quad или \quad x-1=0.$$

Ответ: $x - 1 = 0$.

Нормальное уравнение прямой

Пусть задана произвольная прямая L. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную L. Точку пересечения ее с прямой L обозначим через P. Через $\boldsymbol{n}$ обозначим единичный вектор, совпадающий с направлением вектора $\overrightarrow{OP}$. В случае, если точка P совпадает с O, возьмем в качестве $\boldsymbol{n}$ любой вектор единичной длины.

Так как $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, его координаты имеют вид

$$n = (\cos\varphi, \sin\varphi),$$

где φ - угол между вектором $\boldsymbol{n}$ и осью Ox. Положим $p = |\overrightarrow{OM}|$.

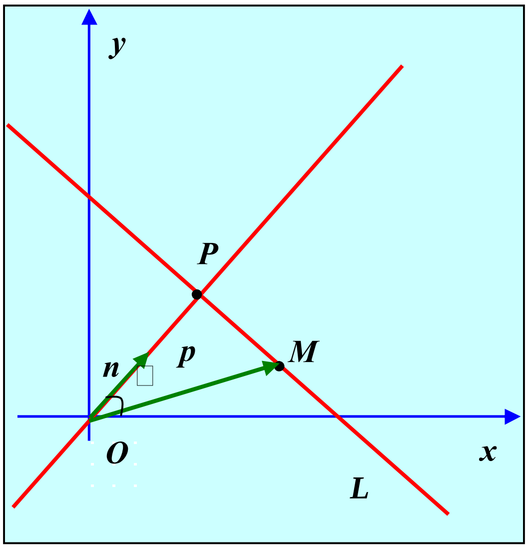

Рис. 10

Имеем

$$M = \{x, y\} \in L \Leftrightarrow np_{\overrightarrow{OP}} \overrightarrow{OM} = p \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot n = p \Leftrightarrow x\cos\varphi + y\sin\varphi = p.$$

Уравнение

$$\boldsymbol{x}\cos\varphi + \boldsymbol{y}\sin\varphi - \boldsymbol{p} = 0$$

называется *нормальным уравнением* прямой.

Для того чтобы перейти от общего уравнения прямой

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{C} = 0$$

к нормальному, надо умножить его на такое число $\boldsymbol{t}$, для которого

$$\boldsymbol{At} = \cos\varphi, \quad \boldsymbol{Bt} = \sin\varphi, \quad \boldsymbol{Ct} = -\boldsymbol{p}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{t}^2 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2}},$$

а знак $\boldsymbol{t}$ противоположен знаку C.

Пример 4. Приведем уравнение прямой

$$3x - 4y + 2 = 0$$

к нормальному виду. Для этого надо разделить обе части на

$$-\sqrt{3^2 + 4^2} = -5.$$

Получаем

$$-\frac{3}{5}\boldsymbol{x} + \frac{4}{5}\boldsymbol{y} - \frac{2}{5} = 0.$$

Отклонение и расстояние от точки до прямой

Обозначим через $\boldsymbol{d}$ расстояние от точки M до прямой L. *Отклонением* точки M от прямой L называется число $\boldsymbol{d}$, если M и начало координат O лежат по разные стороны от прямой L, и число $-\boldsymbol{d}$, если M и O лежат по одну сторону от L. Если O принадлежит L и $\boldsymbol{n}$ = (cos φ, sin φ) – нормальный вектор прямой L, то отклонение положим равным $\boldsymbol{d}$, когда M лежит по ту же сторону от L, куда направлен вектор $\boldsymbol{n}$, и $-\boldsymbol{d}$ – в противном случае.

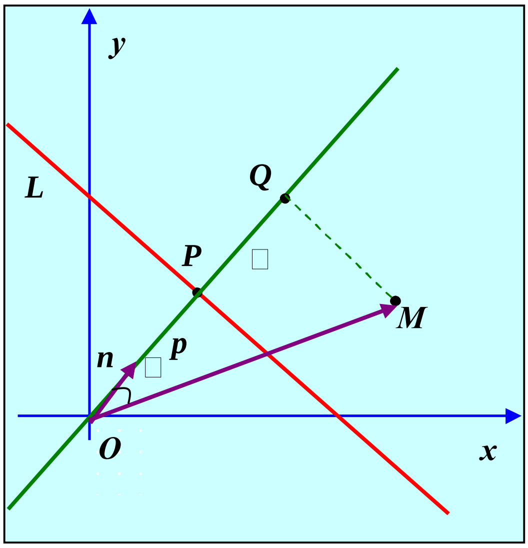

Рис. 11

Пусть Q – проекция точки $M = \{x, y\}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{n}$. Тогда отклонение точки M от прямой L равно

$$d = \boldsymbol{пр}_{\text{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{пр}_{\text{n}}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \cdot \text{n} = \boldsymbol{x}\cos\varphi + \boldsymbol{y}\sin\varphi = \boldsymbol{p} + d.$$

Отсюда

$$\boxed{d = \boldsymbol{x}\cos\varphi + \boldsymbol{y}\sin\varphi - \boldsymbol{p}.}$$

В силу того, что $\boldsymbol{d} = |\delta|$, имеем

$$\boxed{\boldsymbol{d} = |\boldsymbol{x}\cos\varphi + \boldsymbol{y}\sin\varphi - \boldsymbol{p}|.}$$

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника $A = \{0,1\}$, $B = \{2,1\}$ и $C = \{3,-1\}$. Найти длину высоты h, проведенной из вершины B на сторону AC. Длина высоты равна расстоянию от точки B до прямой, проходящей через точки A и C. Найдем уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{\boldsymbol{x} - 0}{3 - 0} = \frac{\boldsymbol{y} - 1}{-1 - 1} \quad \text{или} \quad 2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} - 3 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{x} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{y} - \frac{3}{\sqrt{13}} = 0.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{h} = \left|\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot 1 - \frac{3}{\sqrt{13}}\right| = \frac{4}{\sqrt{13}}.$$

Упражнение 3. Найти расстояние от точек $M_1 = \{-1,3\}$ и $M_2 = \{2,1\}$ до прямой

$$3x - 4y + 1 = 0$$

и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от прямой или по разные стороны.

Решение.

Приведем уравнение прямой к нормальному виду:

$$-\frac{3}{5}\boldsymbol{x}+\frac{4}{5}\boldsymbol{y}-\frac{1}{5}=0$$

и найдем отклонения данных точек от прямой:

$$d_1=-\frac{3}{5}(-1)+\frac{4}{5}\cdot 3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5};$$

$$d_2=-\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot 1-\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{d}_1=|d_1|=\frac{14}{5},\quad \boldsymbol{d}_2=|d_2|=\frac{3}{5},$$

а поскольку отклонения точек от прямой имеют разные знаки, точки расположены по разные стороны от прямой.

Ответ: $\boldsymbol{d}_1=\frac{4}{5}$, $\boldsymbol{d}_2=\frac{3}{5}$, точки расположены по разные стороны от прямой.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Уравнение прямой на плоскости*»

Задача 1.

Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $2x + y + 3 = 0$ и $2x – 5y + 9 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $2x – y - 3 = 0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.

Указание

Выясните, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных, и как расположена данная диагональ по отношению к данным сторонам.

Решение

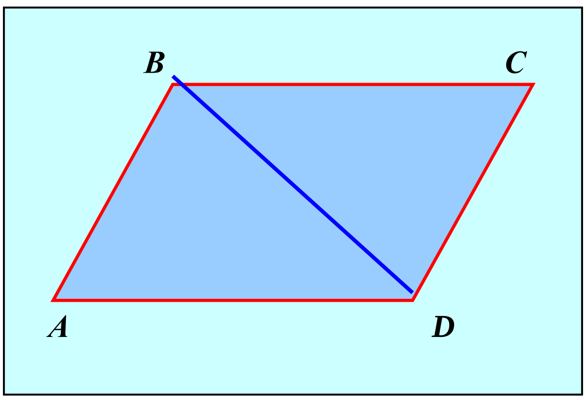

Рис. 12

Выясним, уравнения каких сторон даны в условии задачи: параллельных или смежных.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{2}{2}=1,\quad \frac{B_1}{B_2}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}\neq\frac{A_1}{A_2},$$

следовательно, прямые пересекаются, то есть даны уравнения смежных сторон параллелограмма.

Условие параллельности прямых
A_1x + B_1y + C_1 = 0 *и* A_2x + B_2y + C_2 = 0:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

Пусть даны уравнения сторон *AB* и *AD*. Тогда координаты точки *A* будут решением системы уравнений:

$$\begin{cases}2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+3=0\\ 2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+9=0\end{cases}\Rightarrow 6\boldsymbol{y}-6=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=1,\ \boldsymbol{x}=-2\Rightarrow \boldsymbol{A}(1;-2).$$

Теперь определим, уравнение какой диагонали: *AC* или *BD* – нам известно. Если это диагональ *AC*, то на ней лежит точка *A*, следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению диагонали. Проверим:

$$2\cdot 1-(-2)-3=1\neq 0.$$

Значит, точка *A* не лежит на данной прямой, то есть дано уравнение диагонали *BD*.

Тогда вершина *B* лежит на прямых *AB* и *BD*, значит, ее координаты найдем из системы:

$$\begin{cases}2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+3=0\\ 2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-3=0\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{x}=0,\boldsymbol{y}=-3\Rightarrow \boldsymbol{B}(0;-3).$$

Система уравнений для определения координат точки *D* составлена из уравнений прямых *AD* и *BD*:

$$\begin{cases}2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}+9=0\\ 2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-3=0\end{cases}\Rightarrow -4\boldsymbol{y}+12=0,\boldsymbol{y}=3,\boldsymbol{x}=3\Rightarrow \boldsymbol{D}(3;\ 3).$$

Остается найти координаты точки *C*. Составим уравнения прямых *BC* и *DC*. Поскольку *BC* параллельна *AD*, их угловые коэффициенты равны. Найдем угловой коэффициент прямой *AD*:

$$5\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}+9,\ \boldsymbol{y}=\frac{2}{5}\boldsymbol{x}+\frac{9}{5}\Rightarrow \boldsymbol{k}_{AD}=\frac{2}{5}=\boldsymbol{k}_{BC}.$$

Тогда *BC* можно задать уравнением

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_B=\boldsymbol{k}_{BC}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_B)\Rightarrow \boldsymbol{y}+3=\frac{2}{5}\boldsymbol{x},\ 2\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{y}-15=0.$$

Аналогично *AB*: y = -2x – 3, k_{AB} = -2 = k_{DC}; *DC*: y – 3 = -2(x – 3), 2x + y – 9 = 0. Найдем координаты точки *C*, решив систему из двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x} - 5\boldsymbol{y} - 15 = 0 \\ 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow -6\boldsymbol{y} - 6 = 0,\ \boldsymbol{y} = -1,\ \boldsymbol{x} = 5 \Rightarrow \boldsymbol{C}(5;-1).$$

Ответ: $A(1; -2)$, $B(0; -3)$, $C(5; -1)$, $D(3; 3)$.

Задача 2.
Найти точку, симметричную точке $A(2; 1)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(-1; 7)$ и $C(1; 8)$.

Указание

Представьте себе, что вам нужно *построить* искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

1) провести прямую BC;
2) провести через точку A прямую, перпендикулярную BC;
3) найти точку O пересечения этих прямых и отложить на прямой AO по другую сторону прямой BC отрезок $OA_1 = AO$.

Решение

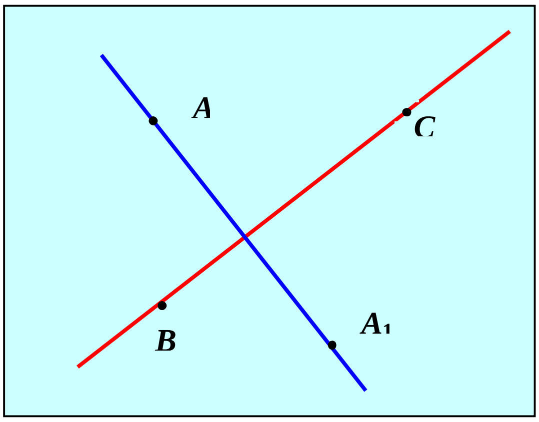

Рис. 13

Представим себе, что нам нужно *построить* искомую точку на плоскости. Последовательность действий при этом можно задать так:

4) провести прямую BC;
5) провести через точку A прямую, перпендикулярную BC;
6) найти точку O пересечения этих прямых и отложить на прямой AO по другую сторону прямой BC отрезок $OA_1 = AO$.

Тогда точка A_1 будет симметричной точке A относительно прямой BC.

Теперь заменим каждое из действий составлением уравнений и вычислением координат точек.

1) Найдем уравнение прямой BC в виде:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x+1}{1+1} = \frac{y-7}{8-7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-7}{1} \Rightarrow x - 2y + 15 = 0.$$

2) Найдем угловой коэффициент прямой *BC*:

$$2y = x + 15,\ y = \frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \Rightarrow k_{BC} = \frac{1}{2}.$$

Прямая *AO* перпендикулярна прямой *BC*, поэтому

$$k_{AO} = -\frac{1}{k_{BC}} = -2.$$

Составим уравнение прямой *AO*:

$$y - y_A = k_{AO}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - 5 = 0.$$

3) Найдем координаты точки *O* как решение системы:

$$\begin{cases} x - 2y + 15 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 0,$$

$$x = -1,\ y = 7 \Rightarrow O(-1; 7).$$

4) Точка *O* – середина отрезка AA_1, поэтому

$$x_O = \frac{x_A + x_{A_1}}{2},\ y_O = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{A_1} = 2x_O - x_A = -2 - 2 = -4;$$

$$y_{A_1} = 2y_O - y_A = 14 - 1 = 13 \Rightarrow O(-4; 13).$$

Ответ: (-4; 13).

Задача 3.

Найти угол между прямыми l_1: $3x - y + 5 = 0$ и l_2: $2x + y - 7 = 0$.

Указание

Если □ – угол между прямыми l_1 и l_2, то □ = □$_2$ - □$_1$, где □$_2$ и □$_1$ – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с положительной полуосью *Ox*. Тогда

$$tg j = tg(a_2 - a_1) = \frac{tg a_2 - tg a_1}{1 + tg a_2 \cdot tg a_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2.

Решение

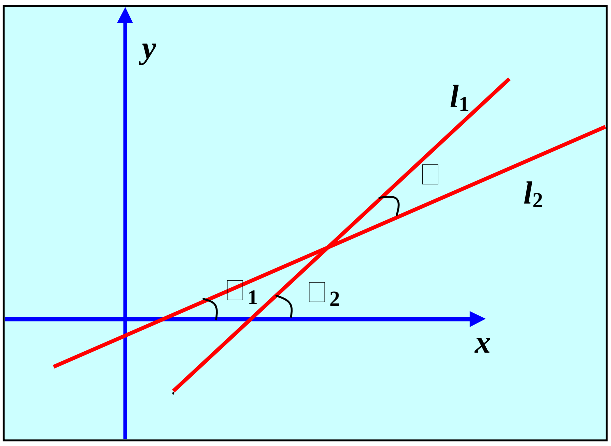

Рис. 14

Если □ – угол между прямыми l_1 и l_2, то □ = □$_2$ - □$_1$, где □$_2$ и □$_1$ – углы, образованные прямыми l_1 и l_2 с положительной полуосью Ox. Тогда

$$\boldsymbol{tg}j = \boldsymbol{tg}(a_2 - a_1) = \frac{\boldsymbol{tg}a_2 - \boldsymbol{tg}a_1}{1 + \boldsymbol{tg}a_2 \cdot \boldsymbol{tg}a_1} = \frac{\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1}{1 + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_1},$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2. Найдем k_1 и k_2: для l_1 $y = 3x + 5$, $k_1 = 3$; для второй: $y = -2x + 7$, $k_2 = -2$. Следовательно,

$$\boldsymbol{tg}j = \frac{-2-3}{1-2\cdot 3} = 1,\ j = 45°.$$

Ответ: 45$^{\text{o}}$.

Для прямых A_1x + B_1y + C_1 = 0 *и* A_2x + B_2y + C_2 = 0 *справедлива формула:*

$$tg j = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Задача 4.

Определить, лежит ли точка $M(2; 3)$ внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$.

Указание

Если точка M расположена внутри треугольника ABC, то ее отклонение δ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне, а если точка M лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника.

Решение

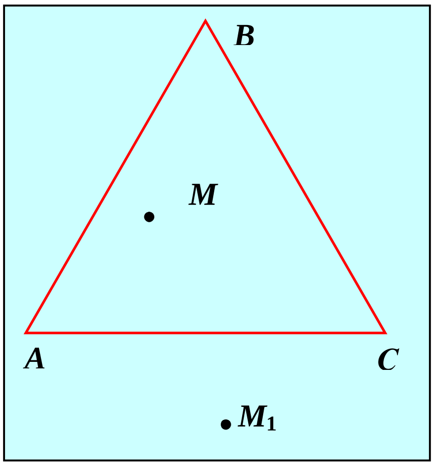

Рис. 15

Пусть первое уравнение задает сторону AB, второе – BC, третье – AC. Найдем координаты точек A, B и C:

$$\begin{cases} 4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-7=0 \\ \boldsymbol{x}+5\boldsymbol{y}-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y}=4\boldsymbol{x}-7 \\ \boldsymbol{x}+20\boldsymbol{x}-35-7=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}=2,\ \boldsymbol{y}=1 \Rightarrow A(2;\ 1).$$

$$\begin{cases} 4\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}-7=0 \\ \boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-31=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y}=4\boldsymbol{x}-7 \\ \boldsymbol{x}+12\boldsymbol{x}-21-31=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}=4,\ \boldsymbol{y}=9 \Rightarrow B(4;\ 9).$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-7=0 \\ \boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-31=0 \end{cases} \Rightarrow 2y+24=0,$$

$$y=-12,\ x=67 \Rightarrow C(67;-12).$$

Для ответа на вопрос задачи отметим, что:

1) если точка M расположена внутри треугольника ABC, то ее отклонение δ от каждой стороны треугольника имеет тот же знак, что и для вершины, не лежащей на этой стороне (т.е. точка M расположена относительно каждой стороны треугольника в одной полуплоскости с третьей вершиной);
2) если точка M лежит вне треугольника, то по крайней мере с одной из вершин она окажется в разных полуплоскостях относительно стороны треугольника (на рисунке: точки M_1 и B расположены по разные стороны от прямой AC).

Составим нормальные уравнения сторон треугольника ABC:

$$\boldsymbol{AB}:\ \sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{17},\ \boldsymbol{c}<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{\sqrt{17}},\ \boldsymbol{AB}:\ \frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{x}-\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{y}-\frac{7}{\sqrt{17}}=0;$$

$$\boldsymbol{BC}:\ \sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{10},\ \boldsymbol{c}<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \boldsymbol{BC}:\ \frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{x}+\frac{3}{\sqrt{10}}\boldsymbol{y}-\frac{31}{\sqrt{10}}=0;$$

$$\boldsymbol{AC}:\ \sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{26},\ \boldsymbol{c}<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{\sqrt{26}},\ \boldsymbol{AC}:\ \frac{1}{\sqrt{26}}\boldsymbol{x}+\frac{5}{\sqrt{26}}\boldsymbol{y}-\frac{7}{\sqrt{26}}=0.$$

Вычислим соответствующие отклонения:

1) для точек *M* и *A* относительно прямой *BC*:

$$d_{\boldsymbol{M}}=\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{9}{\sqrt{10}}-\frac{31}{\sqrt{10}}=-\frac{20}{\sqrt{10}}<0;$$

$$d_{\boldsymbol{A}}=\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{31}{\sqrt{10}}=-\frac{26}{\sqrt{10}}<0.$$

2) для точек *M* и *B* относительно прямой *AC*:

$$d_{\boldsymbol{M}}=\frac{2}{\sqrt{26}}+\frac{15}{\sqrt{26}}-\frac{7}{\sqrt{26}}=\frac{10}{\sqrt{26}}>0;$$

$$d_{\boldsymbol{B}}=\frac{4}{\sqrt{26}}+\frac{45}{\sqrt{26}}-\frac{7}{\sqrt{26}}=\frac{42}{\sqrt{26}}>0.$$

3) для точек *M* и *C* относительно прямой *AB*:

$$d_{\boldsymbol{M}}=\frac{8}{\sqrt{17}}-\frac{3}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{\sqrt{17}}<0;$$

$$d_{\boldsymbol{C}}=\frac{168}{\sqrt{17}}+\frac{12}{\sqrt{17}}-\frac{7}{\sqrt{17}}=\frac{173}{\sqrt{17}}>0.$$

Итак, точки *M* и *C* лежат по разные стороны от прямой *AB*. Следовательно, точка *M* расположена вне треугольника *ABC*.

Ответ: Точка *M* расположена вне треугольника *ABC*.

Задача 5.

Для треугольника *ABC* с вершинами *A*(-3; -1), *B*(1; 5), *C*(7; 3) составить уравнения медианы и высоты, выходящих из вершины *B*.

Указание

Составьте уравнение медианы как прямой, проходящей через точки *B* и *M* – середину стороны *AC*, а высоты – как прямой, проходящей через точку *B* и перпендикулярной стороне *AC*.

Решение

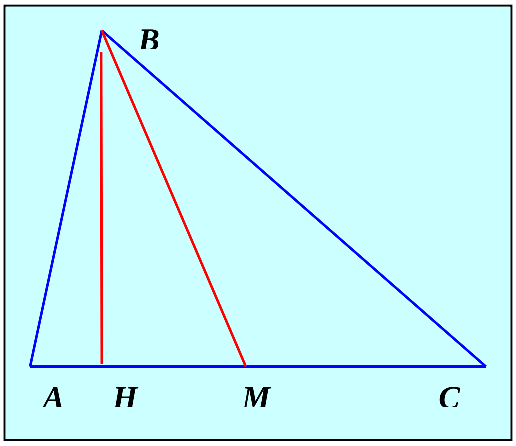

Рис. 16

1) Медиана BM проходит через точку B и точку M – середину отрезка AC. Найдем координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Тогда уравнение медианы можно записать в виде:

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B} \Rightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-5}{1-5} \Rightarrow 4x + y - 9 = 0.$$

2) Высота BH перпендикулярна стороне AC. Составим уравнение AC:

$$\frac{x+3}{7+3} = \frac{y+1}{3+1} \Rightarrow 2x - 5y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5},$$

$$k_{AC} = \frac{2}{5},\ k_{BH} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{5}{2}.$$

$$BH:\ y - 5 = -\frac{5}{2}(x-1) \Rightarrow 5x + 2y - 15 = 0.$$

Ответ: медиана BM: $4x + y - 9 = 0$; высота BH: $5x + 2y - 15 = 0$.

Задача 6.

Определить, при каком значении a прямая

$$(a-5)x + (a^2-1)y + 2a^2 + 7a - 9 = 0$$

параллельна оси ординат. Написать уравнение прямой.

Указание

Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$ $B = 0$, $C \neq 0$.

Решение

Если прямая параллельна оси ординат, то в уравнении $Ax + By + C = 0$ $B = 0$, $C \neq 0$. Из условия $B = 0$ получаем: $a^2 - 1 = 0$, $a = \pm 1$.
При $a = 1$ $C = 2 + 7 - 9 = 0$ – второе условие не выполняется (получившаяся при этом прямая $-4x = 0$ не параллельна оси Oy, а совпадает с ней).
При $a = -1$ получим: $-6x - 14 = 0$, $3x + 7 = 0$.

Ответ: $3x + 7 = 0$ при $a = -1$;

Задача 7.
Составить уравнения всех прямых, проходящих через точку $M(2; 3)$ и отсекающих от координатного угла треугольник площадью 12.

Указание

Составьте уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $|a|$ и $|b|$ - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| = 12,$$

откуда $|ab| = 24$. Кроме того, координаты точки $M(2; 3)$ должны удовлетворять уравнению «в отрезках».

Решение

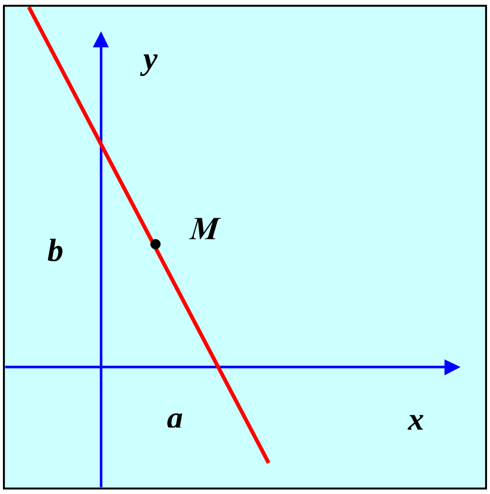

Рис. 17

Составим уравнение искомой прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где |*a*| и |*b*| - длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях. Тогда

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|a|\cdot|b| = 12,$$

откуда |*ab*| = 24. Кроме того, координаты точки *M*(2; 3) должны удовлетворять уравнению «в отрезках». Таким образом, для *a* и *b* можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \\ |ab|=24 \end{cases}.$$

1) $\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \\ ab=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{24}{a} \\ \frac{2}{a}+\frac{a}{8}=1 \end{cases} \Rightarrow a^2-8a+16=0, a=4,\ b=6.$

2) $\begin{cases} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1 \\ ab=-24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{24}{a} \\ \frac{2}{a}-\frac{a}{8}=1 \end{cases} \Rightarrow a^2+8a-16=0,$

$$a=-4\pm4\sqrt{2},\ b=-\frac{24}{-4\pm4\sqrt{2}}=-6(1\mp\sqrt{2}).$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяют три прямые:

1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow 3x+2y-12=0;$

2) $-\frac{x}{4(1+\sqrt{2})}-\frac{y}{6(1-\sqrt{2})}=1 \Rightarrow 3(1-\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})y-12=0;$

3) $-\frac{x}{4(1-\sqrt{2})}-\frac{y}{6(1+\sqrt{2})}=1 \Rightarrow 3(1+\sqrt{2})x+2(1-\sqrt{2})y-12=0.$

Ответ:

$3x+2y-12=0;$

$3(1-\sqrt{2})x+2(1+\sqrt{2})y-12=0;$

$3(1+\sqrt{2})x+2(1-\sqrt{2})y-12=0.$

2.2.2. *Уравнение плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве*

Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Говорят, что соотношение (или уравнение)

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

задает множество точек P на плоскости, если для любой точки $M \in P$ ее координаты удовлетворяют равенству (1), и наоборот, если для всех троек (x,y,z), удовлетворяющих (1), точка $M = \{x, y,z\}$ принадлежит множеству P. При этом говорят, что уравнение (1) является уравнением множества P.

Пусть в пространстве дана точка $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. Найдем уравнение плоскости P, проходящей через эту точку перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$. Пусть $M = \{x, y, z\}$ – произвольная точка на плоскости P. Тогда

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp n \Leftrightarrow n\overrightarrow{MM_0} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

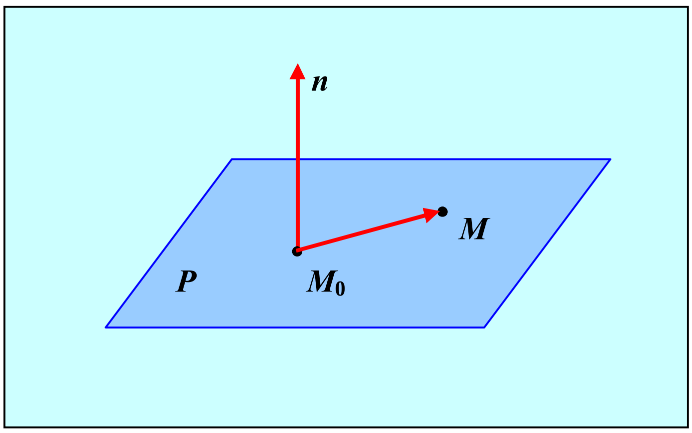

Рис. 1

Тем самым уравнение плоскости P задается в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Нормальным вектором плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Пример 1. Найдем уравнение плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = (-2,2,3)$, проходящей через точку $M_0 = \{1,2,-1\}$. Имеем

$$-2(x - 1) + 2(y - 2) + 3(z + 1) = 0$$

или

$$-2x + 2y + z + 1 = 0.$$

Теорема 10.1. Всякая плоскость в пространстве может быть задана уравнением

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Cz}+\boldsymbol{D}=0, \quad \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2\neq 0, \qquad (3)$$

и любое уравнение (3) задает в пространстве некоторую плоскость. При этом вектор $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ является нормальным вектором этой плоскости.

Доказательство.
Пусть дана произвольная плоскость. Выберем на ней точку $M_0=\{x_0, y_0, z_0\}$. Пусть $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ – некоторый нормальный вектор этой плоскости. Тогда, как было показано выше, уравнение этой плоскости запишется в виде (3).

Покажем, что всякое уравнение (3) определяет некоторую плоскость в пространстве. Найдем точку $M_0=\{x_0, y_0, z_0\}$, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$\boldsymbol{Ax}_0+\boldsymbol{By}_0+\boldsymbol{Cz}_0+\boldsymbol{D}=0.$$

Если $A\neq 0$, то, например, можно положить

$$\boldsymbol{x}_0=-\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{z}_0=0.$$

Если $B\neq 0$, то

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{z}_0=0, \quad \boldsymbol{y}_0=-\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{B}}.$$

А если $C\neq 0$, то

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0=0, \quad \boldsymbol{z}_0=-\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}}.$$

Теперь построим плоскость с нормальным вектором $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$, проходящую через точку M_0. Ее уравнение будет иметь вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)=0.$$

Раскрывая скобки, приходим к уравнению (3).

Уравнение (3) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве.

Неполные уравнения плоскости

Если хотя бы один из коэффициентов уравнения (3) равен нулю, то такое уравнение называется *неполным*.

1. Предположим, что $D=0$, т.е. уравнение прямой задается в виде

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Cz}=0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат, так как координаты точки $O=\{0,0,0\}$ удовлетворяют уравнению этой плоскости.

2. Пусть $A = 0$. Тогда плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна координатной оси Ox, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (0,B,C)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{i}$.
3. Пусть $B = 0$. Тогда плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна координатной оси Oy, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A,0,C)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{j}$.
4. Пусть $C = 0$. Тогда плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна координатной оси Oz, так как ее нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (A,B,0)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{k}$.
5. Если $A = B = 0$, то плоскость $Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxy, так как она параллельна осям Ox и Oy.
6. Если $A = C = 0$, то плоскость $By + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz, так как она параллельна осям Ox и Oz.
7. Если $B = C = 0$, то плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz, так как она параллельна осям Oy и Oz.

Уравнение плоскости в отрезках

Предположим, что все коэффициенты в уравнении плоскости (3) отличны от нуля. Тогда, перенеся D в правую часть равенства и разделив обе части равенства на $-D$, получим уравнение

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \qquad (4)$$

где $p = -D/A$, $q = -D/B$, а $r = -D/C$.. Уравнение (4) называется уравнением плоскости *в отрезках*. Числа p, q и r имеют простой геометрический смысл – это величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что точки с координатами $\{p,0,0\}$, $\{0,q,0\}$ и $\{0,0,r\}$ удовлетворяют уравнению (4).

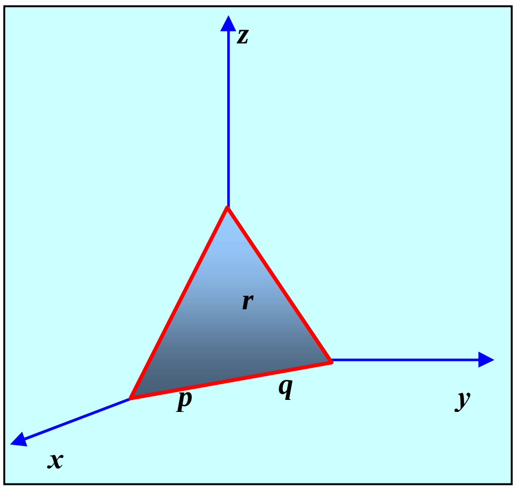

Рис. 2

Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы уравнения двух плоскостей

$$P_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 + D_1 = 0,$$

$$P_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 + D_2 = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются нормальными векторами для плоскостей P_1 и P_2 соответственно.

1. Условие параллельности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно пропорциональности координат этих векторов. Таким образом,

$$\boxed{P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.}$$

2. Условие перпендикулярности плоскостей P_1 и P_2 эквивалентно условию ортогональности нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, что эквивалентно равенству нулю скалярного произведения этих векторов. Таким образом,

$$\boxed{P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.}$$

3. Нахождение угла φ между плоскостями P_1 и P_2 сводится к нахождению угла между нормальными векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Имеем

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\,|\mathbf{n}_2|}.$$

Тем самым

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.}$$

Пример 12. При каких значениях параметра a плоскости

$$P_1: \quad ax + 2y - 3z + 1 = 0,$$

$$P_2: \quad 2x - 2ay + z - 2 = 0$$

перпендикулярны?

Найдем нормальные векторы этих плоскостей. Имеем

$$\mathbf{n}_1 = (a, 2, -3), \quad \mathbf{n}_2 = (2, -2a, 1).$$

Условие перпендикулярности плоскостей запишется теперь в виде

$$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4a - 3 = 0, \quad a = -1,5.$$

Упражнение 1. Найти угол между плоскостями

$$P_1: \quad x + y + 4 = 0,$$
$$P_2: \quad 3x - 3z + 1 = 0.$$

Решение.

$$\cos j = \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 0 + 0\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{1}{2}, \quad j = 60°.$$

Ответ: 60°.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки $M_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $M_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $M_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, не лежащие на одной прямой. Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти три точки. Векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ не коллинеарны, поэтому точка $M = \{x, y, z\}$ лежит на искомой плоскости в том и только в том случае, если векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}$ компланарны.

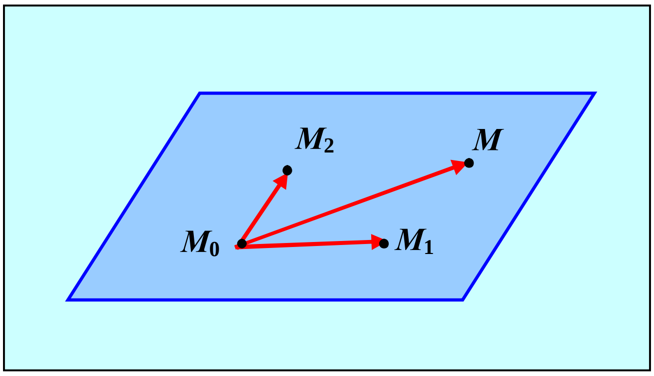

Рис. 3

Условие компланарности трех векторов эквивалентно равенству нулю их смешанного произведения. В силу того, что

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$
$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0),$$

получаем уравнение плоскости, проходящей через точки M_0, M_1 и M_2, в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нормальное уравнение плоскости

Пусть задана произвольная плоскость P. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную P. Точку пересечения ее с плоскостью P обозначим через R. Через $\boldsymbol{n}$ обозначим единичный вектор, совпадающий с направлением вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{OR}}$ (см. рис. 10.4). В случае, если точка R совпадает с O, возьмем в качестве $\boldsymbol{n}$ любой вектор единичной длины.

Так как $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, его координаты имеют вид

$$n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где α, β и γ - углы между вектором $\boldsymbol{n}$ и осями Ox, Oy и Oz соответственно. Положим

$$\boldsymbol{p} = |\overrightarrow{\boldsymbol{OR}}|.$$

Имеем

$$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\} \in \boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{np}_{\overrightarrow{OR}} \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}\cos\alpha + \boldsymbol{y}\cos\beta + \boldsymbol{z}\cos\gamma = \boldsymbol{p}.$$

Уравнение

$$\boxed{\boldsymbol{x}\cos\alpha + \boldsymbol{y}\cos\beta + \boldsymbol{z}\cos\gamma - \boldsymbol{p} = 0}$$

называется *нормальным уравнением* плоскости.

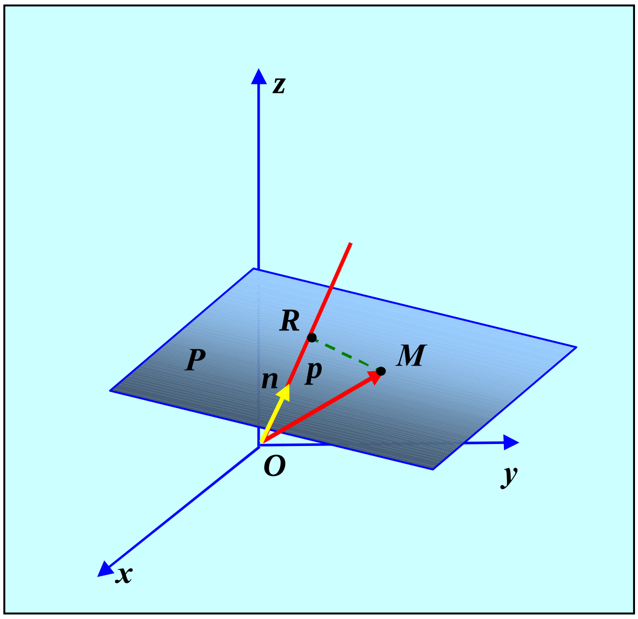

Рис. 4

Для того чтобы перейти от общего уравнения плоскости

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = 0$$

к нормальному, надо умножить его на такое число t, для которого

$$\boldsymbol{At} = \cos\alpha, \quad \boldsymbol{Bt} = \cos\beta, \quad \boldsymbol{Ct} = \cos\gamma, \quad \boldsymbol{Dt} = -\boldsymbol{p}.$$

Так как сумма направляющих косинусов равна единице, то

$$t^2 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а знак t противоположен знаку D.

Пример 3. Приведем уравнение плоскости

$$2x - y + 2z - 3 = 0$$

к нормальному виду. Для этого надо разделить обе части на

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Получаем

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Отклонение и расстояние от точки до плоскости

Обозначим через d расстояние от точки M до плоскости P. *Отклонением* точки M от плоскости P называется число d, если M и начало координат O лежат по разные стороны от плоскости P, и число $-d$, если M и O лежат по одну сторону от P. Если O принадлежит P и $\boldsymbol{n}$ = (cos□, cos□, cos□) – нормальный вектор плоскости P, то отклонение положим равным d, когда M лежит по ту сторону от P, куда направлен вектор $\boldsymbol{n}$, и $-d$ – в противном случае.

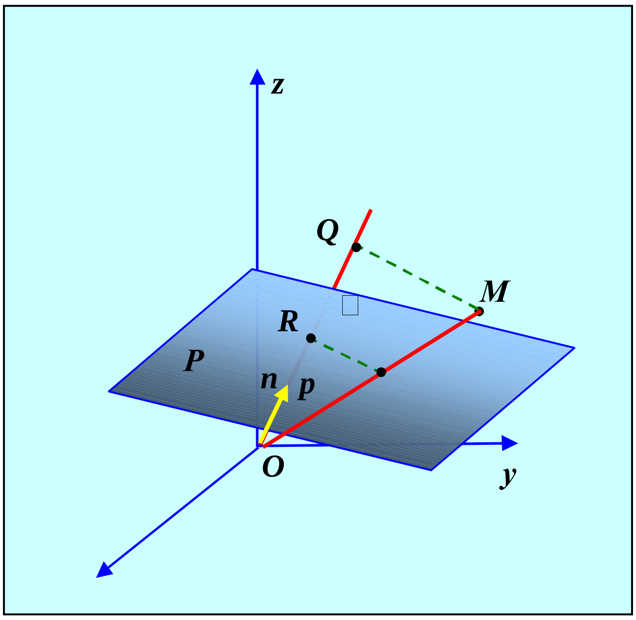

Рис. 5

Пусть Q – проекция точки $M = \{x, y, z\}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{n}$. Тогда отклонение точки M от плоскости P равно

$$d = \boldsymbol{np}_{\text{n}} \overrightarrow{\boldsymbol{RQ}}.$$

Поэтому

$$np_{\text{n}}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}\cdot \text{n} = x\cos a + y\cos b + z\cos g = p + d.$$

Отсюда

$$\boxed{d = x\cos a + y\cos b + z\cos g - p.}$$

В силу того, что *d* = |□ |, имеем

$$\boxed{d = |x\cos a + y\cos b + z\cos g - p|.}$$

Пример 4. Даны координаты вершин пирамиды *A* = {0,1,1}, *B* = {2,1,-1}, *C* = {3,-1,0} и *D* = {3,1,2}. Найти длину высоты *h*, проведенной из вершины *A* на основание *BCD*.

Длина высоты равна расстоянию от точки *A* до плоскости, проходящей через точки *B*, *C* и *D*. Найдем уравнение плоскости, проходящей через эти точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & -1-1 & 0+1 \\ 3-2 & 1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$-6(x-2) - 2(y-1) + 2(z+1) = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая на -2, приходим к уравнению

$$3x + y - z - 8 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$\frac{3}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z - \frac{8}{\sqrt{11}} = 0.$$

Следовательно,

$$h = \left|\frac{3}{\sqrt{11}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot 1 - \frac{8}{\sqrt{11}}\right| = \frac{8}{\sqrt{11}}.$$

Упражнение 2. Найти расстояния от точек M_1 = {-1,3,2} и M_2 = {2,1,-3} до плоскости

$$x - 2y + 2z + 1 = 0$$

и выяснить, лежат ли эти точки по одну сторону от плоскости или по разные стороны.

Решение.

Приведем уравнение плоскости к нормальному виду:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0$$

и найдем отклонения точек M_1 и M_2 от плоскости:

$$d_1 = \left|-\frac{1}{3}(-1)+\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3},$$

$$d_2 = \left|-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}(-3)-\frac{1}{3}\right| = \frac{5}{3}.$$

Поскольку отклонения имеют одинаковые знаки, точки лежат по одну сторону от плоскости. Расстояния от точек до плоскости равны

$$\boldsymbol{d}_1 = |d_1| = \frac{2}{3}, \quad \boldsymbol{d}_2 = |d_2| = \frac{5}{3}.$$

Ответ: точки лежат по одну сторону от плоскости; расстояние от точки M_1 до плоскости равно 2/3, а от точки M_2 – 5/3.

Прямая в пространстве

Прямую в пространстве невозможно задать одним уравнением. Для этого требуется система двух или более уравнений.

Первая возможность составить уравнения прямой в пространстве – представить эту прямую как пересечение двух непараллельных плоскостей, заданных уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

где коэффициенты A_1,B_1,C_1 и A_2,B_2,C_2 не пропорциональны:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_1 &= 0, \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Однако при решении многих задач удобнее пользоваться другими уравнениями прямой, содержащими в явной форме некоторые ее геометрические характеристики.

Составим уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее **направляющим вектором**.

Для любой точки $M(x,y,z)$, лежащей на данной прямой, вектор $\boldsymbol{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен направляющему вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому имеют место равенства:

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0}{\boldsymbol{n}}, \qquad (6)$$

называемые **каноническими уравнениями** прямой в пространстве.

В частности, если требуется получить уравнения прямой, проходящей через две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, направляющим вектором такой прямой можно считать вектор $\boldsymbol{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, и уравнения (6) принимают вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad - \qquad (7)$$

уравнения прямой, проходящей через две данные точки.
Если же принять каждую из равных дробей в уравнениях (6) за некоторый параметр *t*, можно получить так называемые **параметрические уравнения прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt. \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad (8)$$

Для того, чтобы перейти от уравнений (5) к каноническим или параметрическим уравнениям прямой, требуется найти направляющий вектор этой прямой и координаты любой точки, принадлежащей ей. Направляющий вектор прямой ортогонален нормалям к обеим плоскостям, следовательно, он коллинеарен их векторному произведению. Поэтому в качестве направляющего вектора можно выбрать $[\boldsymbol{n_1 n_2}]$ или любой вектор с пропорциональными координатами. Чтобы найти точку, лежащую на данной прямой, можно задать одну ее координату произвольно, а две остальные найти из уравнений (5), выбрав их так, чтобы определитель из их коэффициентов не равнялся нулю.

Пример 5.

Составим канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ x - 5y + 4z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Найдем $[\boldsymbol{n_1 n_2}]$. $\boldsymbol{n_1} = (2,1,-3)$, $\boldsymbol{n_2} = (1,-5,4)$. Тогда $[\boldsymbol{n_1 n_2}] = (-11,-11,-11)$.
Следовательно, направляющим вектором прямой можно считать вектор (1,1,1).

Будем искать точку на прямой с координатой $z_0=0$. Для координат x_0 и y_0 получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 5 = 0 \\ x_0 - 5y_0 + 3 = 0 \end{cases},$$

откуда $x_0=2$, $y_0=1$. Теперь можно составить канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Параметрические уравнения той же прямой имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t. \\ z = t \end{cases}$$

Замечание. Если какая-либо из координат направляющего вектора равна 0, то предполагается, что для любой точки прямой числитель соответствующей дроби в канонических уравнениях тоже равен 0.

Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами. Поэтому, если две прямые заданы каноническими уравнениями вида

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{l}_1}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{m}_1}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{n}_1} \quad \boldsymbol{u} \quad \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2}{\boldsymbol{l}_2}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_2}{\boldsymbol{m}_2}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_2}{\boldsymbol{n}_2},$$

косинус угла между ними можно найти по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2+\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2}{\sqrt{\boldsymbol{l}_1^2+\boldsymbol{m}_1^2+\boldsymbol{n}_1^2}\sqrt{\boldsymbol{l}_2^2+\boldsymbol{m}_2^2+\boldsymbol{n}_2^2}}. \qquad (9)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых тоже сводятся к соответствующим условиям для их направляющих векторов:

$$\frac{\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{l}_2}=\frac{\boldsymbol{m}_1}{\boldsymbol{m}_2}=\frac{\boldsymbol{n}_1}{\boldsymbol{n}_2} \quad –$$

условие параллельности прямых,

$$\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2+\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2=0 \quad –$$

условие перпендикулярности прямых.

Угол φ между прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{m}}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0}{\boldsymbol{n}},$$

и плоскостью, определяемой общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можно рассматривать как дополнительный к углу ψ между направляющим вектором прямой и нормалью к плоскости. Тогда

$$\sin\varphi=\cos\psi=\frac{\boldsymbol{Al}+\boldsymbol{Bm}+\boldsymbol{Cn}}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}\sqrt{\boldsymbol{l}^2+\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2}}.$$

Условием параллельности прямой и плоскости является при этом условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$:

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

а **условием перпендикулярности прямой и плоскости** – условие параллельности этих векторов:

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{l}}=\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{m}}=\frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{n}}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Уравнение плоскости в пространстве*»

Задача 1.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A={5; -1; 3}, B={2; 2; 0}, C={-1; 1; 1}.

Указание

Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать координаты точки, лежащей в этой плоскости, и координаты нормали, то есть вектора, перпендикулярного плоскости.

Решение

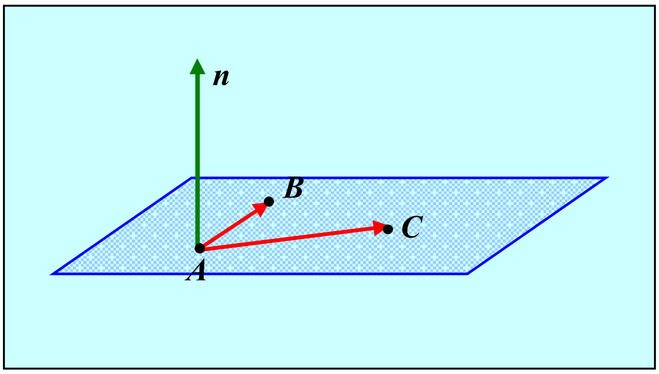

Рис. 6

Векторы AB = (-3; 3; -3) и AC = (-6; 2; -2) параллельны данной плоскости, поэтому их векторное произведение или любой вектор, коллинеарный ему, является нормалью к плоскости.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left\{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= (0;\ 12;\ 12) = 12(0;\ 1;\ 1).$$

Выберем в качестве нормали $\boldsymbol{n}$ = (0; 1; 1), а точкой $\{x_0; y_0; z_0\}$ будем считать точку B. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$0\cdot(x-2) + 1\cdot(y-2) + 1\cdot(z-0) = 0,\ \ y + z - 2 = 0.$

Ответ: $y + z - 2 = 0$.

Задача 2.

Составить канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - 5\boldsymbol{z} - 3 = 0 \\ 5\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} + 8\boldsymbol{z} - 13 = 0 \end{cases}.$$

Указание

Для того, чтобы составить канонические или параметрические уравнения прямой в пространстве, нужно знать координаты какой-либо точки, лежащей на этой на этой прямой, и координаты направляющего вектора, то есть вектора, коллинеарного прямой.

Решение

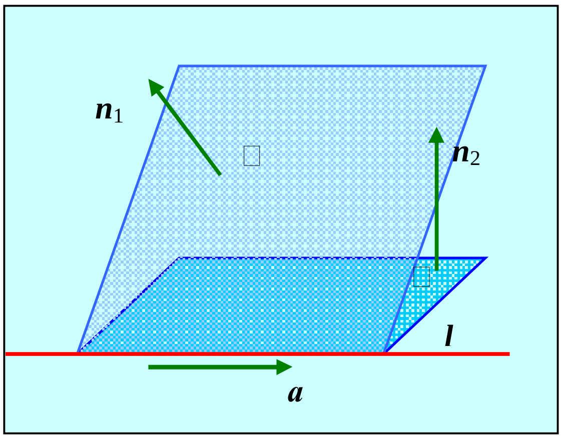

Рис. 7

Прямая является линией пересечения двух плоскостей, поэтому ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ параллелен каждой из этих плоскостей и соответственно перпендикулярен нормалям $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ к данным плоскостям. В таком случае он коллинеарен векторному произведению $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$.

$\boldsymbol{n}_1 = (2; 1; -5)$, $\boldsymbol{n}_2 = (5; 3; 8)$, $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = (23; -41; 1)$.

Итак, $(l; m; n) = (23; -41; 1)$.

Будем искать точку, лежащую на данной прямой, у которой одна из координат принимает выбранное нами значение; тогда остальные две координаты можно определить единственным образом из системы уравнений, задающей пересекающиеся плоскости. Выберем для удобства вычислений $z_0 = 0$, тогда для точки $M=\{x_0; y_0; 0\}$

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0 - 3 = 0 \\ 5\boldsymbol{x}_0 + 3\boldsymbol{y}_0 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y}_0 = 3 - \boldsymbol{x}_0 \\ 5\boldsymbol{x}_0 + 9 - 6\boldsymbol{x}_0 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_0 = -4;\ \boldsymbol{y}_0 = 11,\ \boldsymbol{M} = \{-4;\ 11;\ 0\}.$$

Теперь составим канонические уравнения данной прямой:

$$\frac{\boldsymbol{x}+4}{23} = \frac{\boldsymbol{y}-11}{-41} = \frac{\boldsymbol{z}}{1}.$$

Ответ: $\dfrac{\boldsymbol{x}+4}{23} = \dfrac{\boldsymbol{y}-11}{-41} = \dfrac{\boldsymbol{z}}{1}$.

Задача 3.

Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую l:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{t} - 3 \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{t} + 5 \\ \boldsymbol{z} = -\boldsymbol{t} - 1 \end{cases}$$

и точку $M=\{2; -3; 1\}$.

Указание

Точка A={-3,5,-1} принадлежит плоскости, соответственно вектор $\overrightarrow{AM}$ параллелен плоскости. Кроме того, поскольку данная прямая лежит в плоскости, ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ = (2: 1: -1) параллелен плоскости. Следовательно, нормаль к плоскости коллинеарна векторному произведению этих векторов.

Решение

Поскольку прямая лежит в плоскости, ее направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ = (2: 1: -1) параллелен плоскости. При t = 0 из уравнений прямой получаем:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -1 \end{cases} -$$

координаты точки A, принадлежащей прямой и соответственно плоскости.

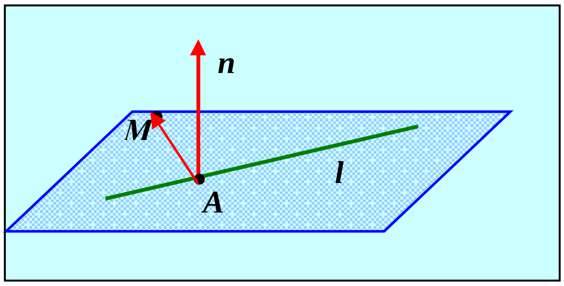

Рис. 8

Тогда вектор AM = (5; -8; 2) параллелен плоскости. Следовательно, нормаль $\boldsymbol{n}$ к плоскости коллинеарна векторному произведению [$\boldsymbol{a}$, AM] = (-6; -9; - 21). Выберем $\boldsymbol{n}$ = (2; 3; 7) и составим уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно $\boldsymbol{n}$:

$$2(x - 2) + 3(y + 3) + 7(z - 1) = 0, \quad 2x + 3y + 7z - 2 = 0.$$

Ответ: $2x + 3y + 7z - 2 = 0$.

Задача 4.
Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$l_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2} \quad и \quad l_2: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 4t + 13 \end{cases}.$$

Указание

Координаты направляющих векторов данных прямых $\boldsymbol{a}_1$ = {3; 2; -2} и

$\boldsymbol{a}_2 = \{1;\ 1;\ 4\}$ не пропорциональны, следовательно, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Составьте уравнение плоскости □, проходящей через прямую l_1 параллельно вектору $\boldsymbol{a}_2$. Если l_1 и l_2 пересекаются, то прямая l_2 будет лежать в этой плоскости; если же l_1 и l_2 скрещиваются, то l_2 параллельна плоскости □, и тогда расстояние между l_1 и l_2 (длина общего перпендикуляра) будет равно расстоянию от любой точки прямой l_2 до плоскости □.

Решение

Координаты направляющих векторов данных прямых $\boldsymbol{a}_1 = \{3;\ 2;\ -2\}$ и $\boldsymbol{a}_2 = \{1;\ 1;\ 4\}$ не пропорциональны, следовательно, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, поэтому прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Составим уравнение плоскости □, проходящей через прямую l_1 параллельно вектору $\boldsymbol{a}_2$. Если l_1 и l_2 пересекаются, то прямая l_2 будет лежать в этой плоскости (рис.9); если же l_1 и l_2 скрещиваются, то l_2 параллельна плоскости □, и тогда расстояние между l_1 и l_2 (длина общего перпендикуляра) будет равно расстоянию от любой точки прямой l_2 до плоскости □ (рис.10).

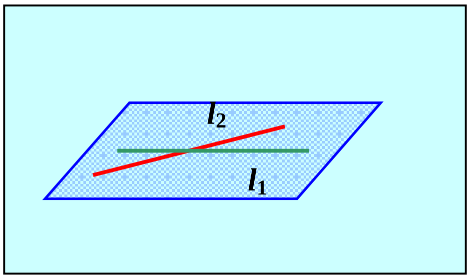

Рис. 9

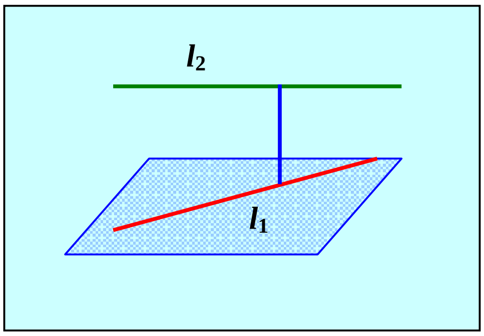

Рис. 10

$[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2] = (10;\ -14;\ 1) = \boldsymbol{n}$, точка $A=\{5;\ 0;\ -25\}$ лежит на прямой l_1, следовательно, она лежит и в плоскости □. Тогда уравнение плоскости □ имеет вид:

$$10(x-5) - 14(y-0) + 1\cdot(z+25) = 0;\quad 10x - 14y + z - 25 = 0.$$

Точка $B=\{1;\ 2;\ 13\}$ принадлежит прямой l_2. Проверим, лежит ли эта точка в плоскости □:

$$10\cdot 1 - 14\cdot 2 + 13 - 25 = -30 \neq 0 \Rightarrow B \notin \boldsymbol{l}_2 \Rightarrow \boldsymbol{l}_2 \not\subset a\,.$$

Тогда искомой величиной будет расстояние от B до □. Его можно найти, составив нормальное уравнение плоскости □:

$$a: \frac{10}{\sqrt{33}}\boldsymbol{x} - \frac{14}{\sqrt{33}}\boldsymbol{y} + \frac{1}{\sqrt{33}}\boldsymbol{z} - \frac{25}{\sqrt{343}} = 0,$$

$$\boldsymbol{d}_B = \left|\frac{10}{\sqrt{33}}\cdot 1 - \frac{14}{\sqrt{33}}\cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{33}}\cdot 13 - \frac{25}{\sqrt{33}}\right| == \left|-\frac{28}{\sqrt{33}}\right| = \frac{28}{\sqrt{33}}.$$

Ответ: $\frac{28}{\sqrt{33}}$.

Задача 5.

Найти точку, симметричную точке A(5; -10; 4) относительно плоскости

□: $x - 3y + z - 6 = 0$.

Указание

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости □ так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения □ с прямой AB.

Решение

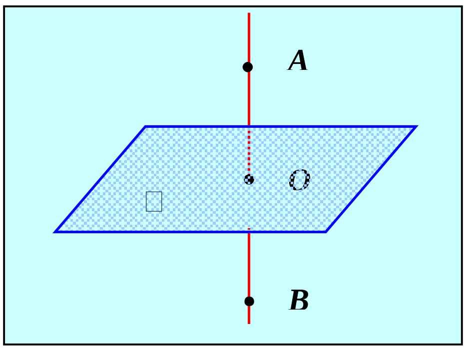

Рис. 11

Искомая точка B лежит на прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости □ так, что $OA = OB$, где точка O – точка пересечения □ с прямой AB. Составим уравнения прямой AB. Эта прямая перпендикулярна □, поэтому ее направляющим вектором можно считать нормаль к плоскости □: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n} = (1; -3; 1)$.

Параметрические уравнения прямой AB имеют вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} + 5 \\ \boldsymbol{y} = -3\boldsymbol{t} - 10. \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{t} + 4 \end{cases}$$

Точка O принадлежит и прямой AB, и плоскости □, поэтому ее координаты должны удовлетворять и уравнениям прямой, и уравнению плоскости.

Подставим в уравнение плоскости □ параметрические выражения для *x*, *y*, *z* из уравнений прямой *AB*:

$$t + 5 - 3(-3t - 10) + t + 4 - 6 = 0;\ 11t + 33 = 0;\ \ t = -3.$$

Итак, координаты точки *O*:

$$\begin{cases} x = -3 + 5 = 2 \\ y = -3(-3) - 10 = -1 \Rightarrow O(2; -1; 1). \\ z = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Поскольку точка *O* – середина отрезка *AB*, то

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_O = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_O - x_A = 4 - 5 = -1 \\ y_B = 2y_O - y_A = -2 + 10 = 8 \Rightarrow B(-1;\ 8; -2). \\ z_B = 2z_O - z_A = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

Ответ: (-1; 8; -2).

2.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

2.3.1. *Линейные операторы и квадратичные формы*

Линейные операторы

Будем говорить, что на множестве векторов *R* задан **оператор** ***A***, если каждому вектору $\boldsymbol{x} \in R$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $A\boldsymbol{x} \in R$.

Оператор *A* называется **линейным**, если для любых векторов ***x*** и ***y*** и для любого действительного числа □ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{A}(l\,\boldsymbol{x}) = l\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \end{aligned} \qquad (1)$$

Линейный оператор называется **тождественным**, если он преобразует любой вектор ***x*** в самого себя. Тождественный оператор обозначается *E*: $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Рассмотрим трехмерное пространство с базисом $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$, в котором задан линейный оператор *A*. Применив его к базисным векторам, мы получим векторы $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, A\boldsymbol{e_3}$, принадлежащие этому трехмерному пространству. Следовательно, каждый из них можно единственным образом разложить по векторам базиса:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\mathrm{e}_1 &= \boldsymbol{a}_{11}\mathrm{e}_1 + \boldsymbol{a}_{21}\mathrm{e}_2 + \boldsymbol{a}_{31}\mathrm{e}_3, \\ \boldsymbol{A}\mathrm{e}_2 &= \boldsymbol{a}_{12}\mathrm{e}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\mathrm{e}_2 + \boldsymbol{a}_{32}\mathrm{e}_3, \qquad (2) \\ \boldsymbol{A}\mathrm{e}_3 &= \boldsymbol{a}_{13}\mathrm{e}_1 + \boldsymbol{a}_{23}\mathrm{e}_2 + \boldsymbol{a}_{33}\mathrm{e}_3. \end{aligned}$$

Матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного оператора** $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$. Столбцы этой матрицы составлены из коэффициентов в формулах (2) преобразования базиса.

Замечание. Очевидно, что матрицей тождественного оператора является единичная матрица *E*.

Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}$ результатом применения к нему линейного оператора *A* будет вектор $A\boldsymbol{x}$, который можно разложить по векторам того же базиса:

$$\boldsymbol{A}\mathrm{x} = \boldsymbol{x}_1'\mathrm{e}_1 + \boldsymbol{x}_2'\mathrm{e}_2 + \boldsymbol{x}_3'\mathrm{e}_3,$$

где координаты $x`_i$ можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1' &= \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{x}_3, \\ \boldsymbol{x}_2' &= \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{x}_3, \qquad (3) \\ \boldsymbol{x}_3' &= \boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{32}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{a}_{33}\boldsymbol{x}_3. \end{aligned}$$

Коэффициенты в формулах этого линейного преобразования являются элементами строк матрицы *A*.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим линейный оператор А и два базиса в трехмерном пространстве: $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ и $\underline{\boldsymbol{e}}_1$, $\underline{\boldsymbol{e}}_2$, $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. Пусть матрица С задает формулы перехода от базиса $\{\boldsymbol{e}_k\}$ к базису $\{\underline{\boldsymbol{e}}_k\}$. Если в первом из этих базисов выбранный линейный оператор задается матрицей А, а во втором – матрицей $\underline{A}$, то можно найти связь между этими матрицами, а именно:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}. \qquad (4)$$

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} \vec{\underline{\boldsymbol{e}}}_1 \\ \vec{\underline{\boldsymbol{e}}}_2 \\ \vec{\underline{\boldsymbol{e}}}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix}, \quad \textit{тогда} \quad \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \vec{\underline{\boldsymbol{e}}}_1 \\ \vec{\underline{\boldsymbol{e}}}_2 \\ \vec{\underline{\boldsymbol{e}}}_3 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, результаты применения одного и того же линейного оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e}_k\}$, т.е. $A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$, и в базисе $\{\underline{\boldsymbol{e}}_k\}$: соответственно $\underline{A}\begin{pmatrix}\underline{\vec{e}_1}\\ \underline{\vec{e}_2}\\ \underline{\vec{e}_3}\end{pmatrix}$ - связаны матрицей C:

$$\underline{A}\begin{pmatrix}\underline{\vec{e}_1}\\ \underline{\vec{e}_2}\\ \underline{\vec{e}_3}\end{pmatrix} = C\, A\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix},$$

откуда следует, что $CA=\underline{A}C$. Умножая обе части этого равенства слева на C^{-1}, получим $C^{-1}CA$ = = $C^{-1}\underline{A}C$, что доказывает справедливость формулы (4).

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Вектор $\boldsymbol{x}$ называется **собственным вектором** матрицы A, если найдется такое число λ, что выполняется равенство: $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, то есть результатом применения к $\boldsymbol{x}$ линейного оператора, задаваемого матрицей A, является умножение этого вектора на число λ. Само число λ называется **собственным числом** матрицы A.

Подставив в формулы (3) $x'_j = \lambda x_j$, получим систему уравнений для определения координат собственного вектора:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}. \qquad (5).$$

Эта линейная однородная система будет иметь нетривиальное решение только в случае, если ее главный определитель равен 0 (правило Крамера). Записав это условие в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим уравнение для определения собственных чисел λ, называемое **характеристическим уравнением**. Кратко его можно представить так:

$$|\mathbf{A} - l\mathbf{E}| = 0, \qquad (6)$$

поскольку в его левой части стоит определитель матрицы A-□E. Многочлен относительно □ | A - □E| называется **характеристическим многочленом** матрицы А.

Свойства характеристического многочлена:

1) Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

$\Delta_A = \Delta_C \Delta_{\underline{A}} \Delta_{C^{-1}}$ (см. (11.4)), но $\Delta_C \Delta_{C^{-1}} = \Delta_E = 1$, следовательно, $\Delta_A = \Delta_{\underline{A}}$. Таким образом, Δ_A не зависит от выбора базиса. Значит, и |A-□E| не изменяется при переходе к новому базису.

2) Если матрица A линейного оператора является **симметрической** (т.е. $a_{ij}=a_{ji}$), то все корни характеристического уравнения (11.6) – действительные числа.

Свойства собственных чисел и собственных векторов:

1) Если выбрать базис из собственных векторов $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$, соответствующих собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A, то в этом базисе линейное преобразование А имеет матрицу диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Доказательство этого свойства следует из определения собственных векторов.

2) Если собственные значения оператора A различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.
3) Если характеристический многочлен матрицы A имеет три различных корня, то в некотором базисе матрица A имеет диагональный вид.

Пример 1.

Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-l & 1 & 3 \\ 1 & 5-l & 1 \\ 3 & 1 & 1-l \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) + 6 - 9(5-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0,$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0,\ \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

Найдем координаты собственных векторов, соответствующих каждому найденному значению λ. Из (5) следует, что если $\boldsymbol{x}_{(1)}=\{x_1,x_2,x_3\}$ – собственный вектор, соответствующий $\lambda_1=-2$, то

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} -$$

совместная, но неопределенная система. Ее решение можно записать в виде $\boldsymbol{x}_{(1)}=(a,0,-a)$, где a – любое число. В частности, если потребовать, чтобы $|\boldsymbol{x}_{(1)}|=1$,

$$\mathrm{x}_{(1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Подставив в систему (5) $\lambda_2=3$, получим систему для определения координат второго собственного вектора - $\boldsymbol{x}_{(2)}=(y_1,y_2,y_3)$:

$$\begin{cases} -2\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + 3\boldsymbol{y}_3 = 0 \\ \boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3 = 0 \\ 3\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 - 2\boldsymbol{y}_3 = 0 \end{cases},$$

откуда $\boldsymbol{x}_{(2)}=(b,-b,b)$ или, при условии $|\boldsymbol{x}_{(2)}|=1$,

$$\mathrm{x}_{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Для $\lambda_3 = 6$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}_{(3)}=(z_1, z_2, z_3)$:

$$\begin{cases} -5\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 + 3\boldsymbol{z}_3 = 0 \\ \boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3 = 0 \\ 3\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 - 5\boldsymbol{z}_3 = 0 \end{cases},$$

$\boldsymbol{x}_{(3)}=\{c,2c,c\}$ или в нормированном варианте

$$\mathrm{x}_{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Можно заметить, что $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(2)} = ab - ab = 0$, $\boldsymbol{x}_{(1)}\boldsymbol{x}_{(3)} = ac - ac = 0$, $\boldsymbol{x}_{(2)}\boldsymbol{x}_{(3)} = bc - 2bc + bc = 0$. Таким образом, собственные векторы этой матрицы попарно ортогональны.

Квадратичные формы и их связь с симметрическими матрицами

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Примеры квадратичных форм:

$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 \quad (n=2)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+ \qquad (8)$$
$$+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3 \quad (n=3)$$

Напомним определение симметрической матрицы:

Квадратная матрица называется **симметрической**, если

$$a_{ij}=a_{ji},$$

то есть если равны элементы матрицы, симметричные относительно главной диагонали.

Свойства собственных чисел и собственных векторов симметрической матрицы:

1) Все собственные числа симметрической матрицы действительные.

Доказательство (для n = 2).

Пусть матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,\; \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0. \qquad (9)$$

Найдем дискриминант:

$$D=a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\ge 0,$$

следовательно, уравнение имеет только действительные корни.

2) Собственные векторы симметрической матрицы ортогональны.

Доказательство (для n = 2).

Координаты собственных векторов

$$\vec{e}_1=(x_1,y_1) \quad и \quad \vec{e}_2=(x_2,y_2)$$

должны удовлетворять уравнениям:

$$(a_{11}-\lambda_1)x_1+a_{12}y_1=0, \quad (a_{11}-\lambda_2)x_2+a_{12}y_2=0.$$

Следовательно, их можно задать так:

$$\vec{e}_1=\left(a,\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}a\right), \quad \vec{e}_2=\left(b,\frac{\lambda_2-a_{11}}{a_{12}}b\right).$$

Скалярное произведение этих векторов имеет вид:

$$\vec{e}_1\vec{e}_2 = \frac{ab}{a_{12}^2}\left(a_{12}^2 + l_1 l_2 - a_{11}(l_1 + l_2) + a_{11}^2\right).$$

По теореме Виета из уравнения (9) получим, что

$$l_1 l_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ l_1 + l_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Подставим эти соотношения в предыдущее равенство:

$$\frac{ab}{a_{12}^2}\left(a_{12}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + a_{11}^2\right) = 0.$$

Значит, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$.

Замечание. В примере 1 были найдены собственные векторы симметрической матрицы и обращено внимание на то, что они оказались попарно ортогональными.

Матрицей квадратичной формы (8) называется симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Таким образом, все собственные числа матрицы квадратичной формы действительны, а все собственные векторы ортогональны. Если все собственные числа различны, то из трех нормированных собственных векторов матрицы (10) можно построить базис в трехмерном пространстве. В этом базисе квадратичная форма будет иметь особый вид, не содержащий произведений переменных.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Каноническим видом квадратичной формы (8) называется следующий вид:

$$\overline{f}(x_1, x_2, x_3) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2. \qquad (11)$$

Покажем, что в базисе из собственных векторов квадратичная форма (8) примет канонический вид. Пусть

$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= b_{11}\vec{e}_1 + b_{21}\vec{e}_2 + b_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2{}' &= b_{12}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + b_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3{}' &= b_{13}\vec{e}_1 + b_{23}\vec{e}_2 + b_{33}\vec{e}_3 \end{aligned} \quad -$$

нормированные собственные векторы, соответствующие собственным числам $\square_1, \square_2, \square_3$ матрицы (10) в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда матрицей перехода от старого базиса к новому будет матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

В новом базисе матрица A примет диагональный вид (7) (по свойству собственных векторов). Таким образом, преобразовав координаты по формулам:

$$\begin{aligned} x_1' &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ x_2' &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3\,, \\ x_3' &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned}$$

получим в новом базисе канонический вид квадратичной формы с коэффициентами, равными собственным числам $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$:

$$\overline{f}(x_1', x_2', x_3') = l_1 x_1'^2 + l_2 x_2'^3 + l_3 x_3'^2. \qquad (12)$$

Замечание 1. С геометрической точки зрения рассмотренное преобразование координат представляет собой поворот координатной системы, совмещающий старые оси координат с новыми.

Замечание 2. Если какие-либо собственные числа матрицы (10) совпадают, к соответствующим им ортонормированным собственным векторам можно добавить единичный вектор, ортогональный каждому из них, и построить таким образом базис, в котором квадратичная форма примет канонический вид.

Пример 2.

Приведем к каноническому виду квадратичную форму

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$$

Ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 1 найдены собственные числа и ортонормированные собственные векторы этой матрицы:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Составим матрицу перехода к базису из этих векторов:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(порядок векторов изменен, чтобы они образовали правую тройку). Преобразуем координаты по формулам:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}' \\ \boldsymbol{y} &= \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}' \\ \boldsymbol{z} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}' \end{aligned}.$$

Получим:

$$\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 + 2\boldsymbol{xy} + 6\boldsymbol{xz} + 2\boldsymbol{yz} =$$

$$(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}')^2 + 5(\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}')^2 +$$

$$+(-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}')^2 + 2(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}')(\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}') +$$

$$+6(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}')(-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}') +$$

$$+2(\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}')(-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{y}' + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{z}') =$$

$$= -2\boldsymbol{x}'^2 + 6\boldsymbol{y}'^2 + 3\boldsymbol{z}'^2.$$

Итак, квадратичная форма приведена к каноническому виду с коэффициентами, равными собственным числам матрицы квадратичной формы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«Линейные операторы и квадратичные формы»

Задача 1.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ – базис в векторном пространстве. Разложить вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 + 3\boldsymbol{e}_4$ по новому базису $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$, если $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$.

Указание

Выпишите матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе. Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

Решение

Выпишем матрицу перехода от старого базиса к новому, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования старых координат через новые.

Координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в старом базисе: $\boldsymbol{x}$ = (1; 2; -1; 3). Пусть в новом базисе он имеет координаты: $\boldsymbol{x} = (x, y, z, t)$. Тогда, используя матрицу T, найдем связь между старыми и новыми координатами:

$$\begin{cases}1=x+y+z+t\\ 2=y+z+t\\ -1=z+t\\ 3=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\\ z=-4\\ t=3\end{cases}.$$

Следовательно, в новом базисе $\boldsymbol{x}$ = (-1; 3; -4; 3).

Ответ: $\boldsymbol{x}$ = (-1; 3; -4; 3).

Задача 2.

Найти матрицу A' оператора A:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\1&1&3\end{pmatrix}$$

в базисе $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_2=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.

Указание

Искомая матрица $A' = T^{-1}A\,T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому.

Решение

Искомая матрица $A' = T^{-1}A\,T$, где T – матрица перехода из старого базиса к новому. Составим матрицу T :

$$T=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ A'=(T^{-1}A)T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A'=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 7 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$

Задача 3.

Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указание

Для определения собственных чисел составьте характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-l & 3 \\ 5 & 3-l \end{vmatrix}=0.$$

Координаты собственных векторов $\boldsymbol{r}_i=(x_i, y_i)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке □$_i$.

Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-l & 3 \\ 5 & 3-l \end{vmatrix}=0,\ (1-l)(3-l)-15=0,$$

$$l^2-4l-12=0,\ l_1=-2,\ l_2=6.$$

Найдем собственные векторы:

1) для □ = -2 координаты собственного вектора $\boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1)$ должны удовлетворять системе уравнений, коэффициенты которых получены из элементов строк определителя, стоящего в левой части характеристического уравнения, при подстановке □ = -2:

$$\begin{cases} 3\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{y}_1=0 \\ 5\boldsymbol{x}_1+5\boldsymbol{y}_1=0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{y}_1=-\boldsymbol{x}_1.$$

Если $x_1 = 1$, то $y_1 = -1$, и $\boldsymbol{r}_1 = (1; -1)$. Остальные собственные векторы коллинеарны вектору (1; -1), и общий вид собственного вектора, соответствующего □ = -2: $\boldsymbol{r}_1 = c_1(1; -1)$, где c_1 – произвольная постоянная.
2) для □ = 6 координаты собственного вектора $\boldsymbol{r}_2$ $(x_2; y_2)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} -5\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{y}_2 = 0 \\ 5\boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{y}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{y}_2 = \frac{5}{3}\boldsymbol{x}_2.$$

Пусть $x_2 = 3$, тогда $y_2 = 5$, и $\boldsymbol{r}_2 = (3; 5)$. Соответственно общий вид второго собственного вектора: $\boldsymbol{r}_2 = c_2(3; 5)$.

Ответ: собственные числа □$_1$ = -2, □$_2$ = 6; собственные векторы $\boldsymbol{r}_1 = c_1(1; -1)$, $\boldsymbol{r}_2 = c_2(3; 5)$.

Задача 4.
В пространстве 3-мерных векторов задан оператор

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{i})\boldsymbol{i},$$

где $\boldsymbol{i}$ – базисный вектор декартовой системы координат.
Выяснить геометрический смысл этого оператора.

Указание

Множитель $\boldsymbol{xi}$ – скалярное произведение, то есть число, поэтому вектор $(\boldsymbol{xi})\boldsymbol{i}$ коллинеарен оси Ox.

Решение

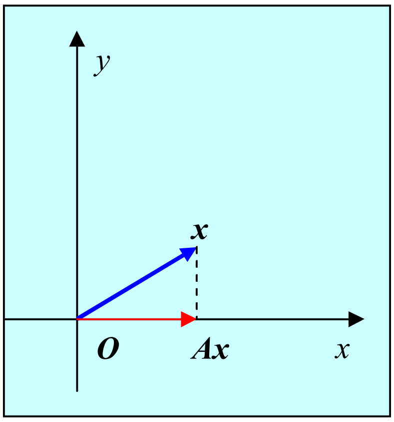

Рис. 1

Оператор A переводит произвольно направленный вектор $\boldsymbol{x}$ в вектор $k\boldsymbol{i}$, коллинеарный оси Ox, поскольку первый множитель – скалярное произведение, то есть число. Из определения скалярного произведения следует, что

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} = (|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cdot\cos\varphi)\,\boldsymbol{i} = (|\boldsymbol{x}|\cos\varphi)\boldsymbol{i}.$$

Следовательно, A – оператор проектирования на ось Ox.
Ответ:
Оператор осуществляет проектирование вектора $\boldsymbol{x}$ на ось Ox;

Задача 5.

Привести матрицу A линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание

Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы линейного оператора, задайте базис из линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, в котором матрица оператора примет диагональный вид, и составьте матрицу перехода к новому базису.

Решение

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-l & 3 & -1 \\ -3 & 5-l & -1 \\ -3 & 3 & 1-l \end{vmatrix} = 0, (l-1)(l-2)^2 = 0,\ l_1 = 1,\ \ l_2 = l_3 = 2.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным числам.

При □ = 1 для вектора $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ получаем:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0 \\ -3x_1 + 4y_1 - z_1 = 0 \\ \quad -3x_1 + 3y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ z_1 = x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = y_1 = z_1 = 1,\ \ \vec{r}_1 = (1;\ 1;\ 1).$$

Подставим в строки определителя □ = 2 и найдем связь между координатами собственного вектора $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} -3\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{z}_2 = 0 \\ -3\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{z}_2 = 0. \\ -3\boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{z}_2 = 0 \end{cases}$$

Та же зависимость получается для координат третьего собственного вектора $\boldsymbol{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Выберем значения двух координат каждого из этих векторов так, чтобы $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ были линейно независимы.

Пусть $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, тогда $z_2 = -3$, и $\boldsymbol{r}_2 = (1; 0; -3)$.

Для $\boldsymbol{r}_3$ выберем $x_3 = 0$, $y_3 = 1$, тогда $z_3 = 3$, $\boldsymbol{r}_3 = (0; 1; 3)$.

Получен базис из линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, в котором матрица оператора примет диагональный вид.

Составим матрицу перехода к новому базису:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную к T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}..$$

Тогда в базисе из собственных векторов матрица оператора

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: в базисе (1; 1; 1), (1; 0; -3), (0; 1; 3) матрица оператора

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.

Линейный оператор A задан в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа и собственные векторы оператора A^{-1} – оператора, обратного к A.

Указание

Собственные числа обратного оператора являются обратными к собственным числам данного оператора, а их собственные векторы одинаковы.

Решение

Характеристическое уравнение для A:

$$\begin{vmatrix} 2-l & 1 \\ 1 & 2-l \end{vmatrix} = 0, (l-2)^2 = 1,\ l-2 = \pm 1,\ l_1 = 3,\ l_2 = 1.$$

Собственные векторы: для □ = 3 $\boldsymbol{r}_1 = c(1; 1)$, для □ = 1 $\boldsymbol{r}_2 = c(1; -1)$.

Найдем матрицу обратного оператора:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}..$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-l & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}-l \end{vmatrix} = 0, \left(l-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},\ l-\frac{2}{3} = \pm\frac{1}{3},\ l_1 = 1,\ \ l_2 = \frac{1}{3}.$$

Собственные векторы: для □ = 1 $\boldsymbol{r}_1 = c(1; -1)$, для □ = 1/3 $\boldsymbol{r}_1 = c(1; 1)$.

Ответ: □$_1$ = 1, □$_2$ = 1/3, $\boldsymbol{r}_1 = c(1; -1)$, $\boldsymbol{r}_2 = c(1; 1)$.

Задача 7.
Составить матрицу квадратичной формы $3x^2 - 10xy + 8y^2$ и найти ее собственные числа.

Указание

Матрица квадратичной формы $a_{11}x_2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ является симметрической ($a_{ij} = a_{ji}$) и имеет вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Решение

В нашей задаче $a_{11} = 3$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 8$. Следовательно,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, корнями которого являются собственные числа:

$$\begin{vmatrix} 3-l & -5 \\ -5 & 8-l \end{vmatrix} = 0,\ l^2 - 11l - 1 = 0,\ l = \frac{11 \pm 5\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$,

собственные числа $l_1 = \frac{11-5\sqrt{5}}{2}$, $l_2 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$.

Задача 8.
Найти базис, в котором квадратичная форма $2x^2 + 4xy + 5y^2$ будет иметь канонический вид, и указать этот вид.

Указание

Канонический вид квадратичной формы:

1) во-первых, не содержит произведения xy;
2) во-вторых, коэффициенты при x^2 и y^2 равны собственным числам матрицы квадратичной формы.

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, состоит из нормированных собственных векторов матрицы квадратичной формы.

Решение

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-l & 2 \\ 2 & 5-l \end{vmatrix} = 0, \quad l^2 - 7l + 6 = 0.$$

Собственные числа: $\square_1 = 1$, $\square_2 = 6$.
Собственные векторы:
для $\square_1 = 1$ координаты вектора $\boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ определяются уравнением $x_1 + 2y_1 = 0$, $x_1 = -2y_1$. Если $y_1 = 1$, то $x_1 = -2$, и $\boldsymbol{r}_1 = c\{-2; 1\}$. Найдем значение c из условия, что вектор $\boldsymbol{r}_1$ нормирован, то есть его длина равна 1:

$$|\vec{r}_1| = c\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = c\sqrt{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{r}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Аналогично для $\square_2 = 6$: $\boldsymbol{r}_2 = \{x_2, y_2\}$, $-4x_2 + 2y_2 = 0$, $\boldsymbol{r}_2 = c\{1; 2\}$.

$$|\vec{r}_2| = c\sqrt{1^2 + 2^2} = c\sqrt{5} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{r}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Итак, базис имеет вид:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

и в этом базисе квадратичная форма примет вид: $\square_1 x^2 + \square_2 y^2$, то есть $x^2 + 6y^2$.

Ответ: в базисе $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ квадратичная форма имеет канонический вид: $x^2 + 6y^2$.

Задача 9.
Указать преобразование координат, приводящее квадратичную форму $8x^2 - 12xy + 17y^2$ к каноническому виду.

Указание

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ – нормированные собственные векторы.

Решение

Найдем базис из нормированных собственных векторов.

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} 8-l & -6 \\ -6 & 17-l \end{vmatrix}=0,$$

$$l^2-25l+100=0,\ \ l_1=5,\ \ l_2=20.$$

$$\vec{\boldsymbol r}_1:\ 3\boldsymbol{x}_1-6\boldsymbol{y}_1=0,\ \ \boldsymbol{x}_1=2\boldsymbol{y}_1,\ \ \vec{\boldsymbol r}_1=\boldsymbol{c}\{2;\ 1\},$$

$$|\vec{\boldsymbol r}_1|=1\Rightarrow \boldsymbol{c}=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \ \vec{\boldsymbol r}_1=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right\};$$

$$\vec{\boldsymbol r}_2:\ -12\boldsymbol{x}_2-6\boldsymbol{y}_2=0,\ |\vec{\boldsymbol r}_2|=1\Rightarrow \vec{\boldsymbol r}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты новых базисных векторов $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ в старом базисе:

$$T=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы определяют коэффициенты уравнений, выражающих старые координаты через новые:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{x}'+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}') \\ \boldsymbol{y}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{x}'-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{x}'-2\boldsymbol{y}') \end{cases},$$

где x, y – координаты в старом базисе, а x', y' – в новом.
Таким образом, найдено искомое преобразование.

Ответ: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y') \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y') \end{cases}.$

Задача 10.
Привести к каноническому виду квадратичную форму $5x^2 - 12xy$.

Указание

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{r}_1=(x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{r}_2=(x_2, y_2)$ – нормированные собственные векторы. В новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, причем коэффициенты при x^2 и y^2 совпадают с собственными числами матрицы квадратичной формы.

Решение

$$A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -6 & 0\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}5-l & -6\\ -6 & -l\end{vmatrix}=0,$$

$$l^2-5l-36=0,\ \ l_1=9,\ \ l_2=-4.$$

$$\vec{r}_1:\ -4\boldsymbol{x}_1-6\boldsymbol{y}_1=0,\ \boldsymbol{x}_1=-\frac{3}{2}\boldsymbol{y}_1,\ \vec{r}_1=\boldsymbol{c}\{3;\ -2\},$$

$$|\vec{r}_1|=1\Rightarrow \boldsymbol{c}=\frac{1}{\sqrt{13}},\ \vec{r}_1=\left\{\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{2}{\sqrt{13}}\right\};$$

$$\vec{r}_2:\ 9\boldsymbol{x}_2-6\boldsymbol{y}_2=0,\ |\vec{r}_2|=1\Rightarrow \vec{r}_2=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}.$$

Матрица перехода к базису из собственных векторов:

$$T=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{13}} & \dfrac{2}{\sqrt{13}}\\ -\dfrac{2}{\sqrt{13}} & \dfrac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}.$$

Преобразование координат:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{x}'+\dfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(3\boldsymbol{x}'+2\boldsymbol{y}')\\ \boldsymbol{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{x}'+\dfrac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{y}'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(3\boldsymbol{y}'-2x')\end{cases}.$$

Подставим найденные выражения в квадратичную форму:

$$5\boldsymbol{x}^2-12\boldsymbol{y}^2=\frac{5}{13}(3\boldsymbol{x}'+2\boldsymbol{y}')^2-12\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(3\boldsymbol{x}'+2\boldsymbol{y}')\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(3\boldsymbol{y}'-2\boldsymbol{x}')=$$

$$=\frac{5}{13}(9\boldsymbol{x}'^2+12\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'+4\boldsymbol{y}'^2)-\frac{12}{13}(6\boldsymbol{y}'^2+5\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'-6\boldsymbol{x}'^2)=$$

$$=\frac{1}{13}(117\boldsymbol{x}'^2-52\boldsymbol{y}'^2)=9\boldsymbol{x}'^2-4\boldsymbol{y}'^2.$$

Как и следовало ожидать, в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид, причем коэффициенты при x^2 и y^2 совпадают с собственными числами матрицы квадратичной формы.

Ответ: $9x^2-4y^2$.

Задача 11.

Найти преобразование координат, приводящее квадратичную форму $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz$ к каноническому виду.

Указание

Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования координат:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \boldsymbol{y}_3 \\ \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 & \boldsymbol{z}_3 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\boldsymbol{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ – нормированные собственные векторы.

Решение.

Матрица квадратичной формы $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для заданной квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-l & -3 & 1 \\ -3 & 1-l & -1 \\ 1 & -1 & 5-l \end{vmatrix} = 0,$$

$$l^3 - 7l^2 + 36 = 0,\ (l+2)(l-3)(l-6) = 0,$$

$$l_1 = -2,\ l_2 = 3,\ l_3 = 6.$$

(Мы не останавливаемся подробно на способах решения уравнений высших порядков. В данном случае, например, один из корней был найден перебором делителей свободного члена, а затем левая часть разложена на множители.)

Найдем нормированные собственные векторы:

$$1)\quad l_1 = -2,\ \vec{r}_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1\} : \begin{cases} 3\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1 = 0 \\ -3\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{z}_1 = 0 \Rightarrow \\ \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1 + 7\boldsymbol{z}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{z}_1 = 0 \\ \boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{y}_1^2 + \boldsymbol{z}_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right).$$

$$2)\quad l_2=3,\ \vec{r}_2=\{x_2,y_2,z_2\}:\begin{cases}-2x_2-3y_2+z_2=0\\ -3x_2-2y_2-z_2=0\Rightarrow\\ x_2-y_2+2z_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_2=-x_2\\ z_2=-x_2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2=1\end{cases}\Rightarrow\vec{r}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3)\quad l_3=6,\ \vec{r}_3=\{x_3,y_3,z_3\}:\begin{cases}-5x_3-3y_3+z_3=0\\ -3x_3-5y_3-z_3=0\Rightarrow\\ x_3-y_3-z_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_3=-x_3\\ z_3=2x_3\\ x_1^2+y_1^2+z_1^2=1\end{cases}\Rightarrow\vec{r}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Матрица перехода к новому базису:

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

задает преобразование координат:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{6}}z'.\\ z=-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\end{cases}$$

Заметим, что в новых координатах квадратичная форма примет вид:

$$-2x'^2+3y'^2+6z'^2,$$

где коэффициенты являются собственными числами, стоящими в той же последовательности, что и соответствующие собственные векторы в матрице T.

Ответ: $$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{1}{\sqrt{6}}z'.\\ z=-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{2}{\sqrt{6}}z'\end{cases}$$

2.3.2. *Кривые и поверхности 2-го порядка*

Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка на плоскости называются линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину.

Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается *эллипс*, при пересечении образующих обеих полостей – *гипербола*, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является *парабола*.

Замечание. Все кривые второго порядка задаются уравнениями второй степени от двух переменных.

Эллипс

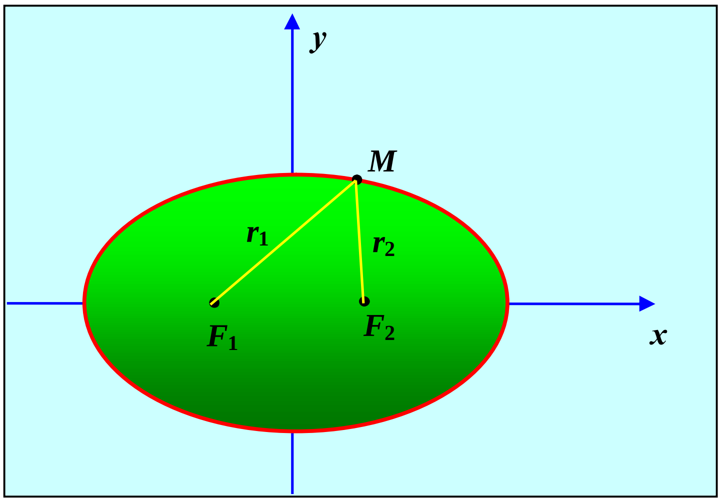

Рис. 1

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность.

Выведем уравнение эллипса, выбрав декартову систему координат так, чтобы ось Ox совпала с прямой F_1F_2, начало координат – с серединой отрезка F_1F_2. Пусть длина этого отрезка равна $2c$, тогда в выбранной системе координат

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на эллипсе, и сумма расстояний от нее до F_1 и F_2 равна $2a$. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, но

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

поэтому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Введя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$ и проведя несложные алгебраические преобразования, получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Эксцентриситетом эллипса называется величина $e=c/a$. *Директрисой* D_i эллипса, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a/e от начала координат.

Замечание. При ином выборе системы координат эллипс может задаваться не каноническим уравнением (1), а уравнением второй степени другого вида.

Свойства эллипса:

1) Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии (главные оси эллипса) и центр симметрии (центр эллипса). Если эллипс задан каноническим уравнением, то его главными осями являются оси координат, а центром – начало координат. Поскольку длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равны $2a$ и $2b$ ($2a>2b$), то главная ось, проходящая через фокусы, называется большой осью эллипса, а вторая главная ось – малой осью.

2) Весь эллипс содержится внутри прямоугольника

$$|x| \le a, \quad |y| \le b.$$

3) Эксцентриситет эллипса $e < 1$. Действительно,

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \le 1.$$

4) Директрисы эллипса расположены вне эллипса (так как расстояние от центра эллипса до директрисы равно a/e, а $e<1$, следовательно, $a/e>a$, а весь эллипс лежит в прямоугольнике $|x| \le a$, $|y| \le b$)

5) Отношение расстояния r_i от точки эллипса до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство.

Расстояния от точки $M(x, y)$ до фокусов эллипса можно представить так:

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x = a + ex, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x = a - ex.$$

Составим уравнения директрис:

$$-x-\frac{a}{e}=0\,(D_1),\quad x-\frac{a}{e}=0\,(D_2).$$

Тогда

$$d_1=\frac{a+ex}{e},\quad d_2=\frac{a-ex}{e}.$$

Отсюда $r_i / d_i = e$, что и требовалось доказать.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

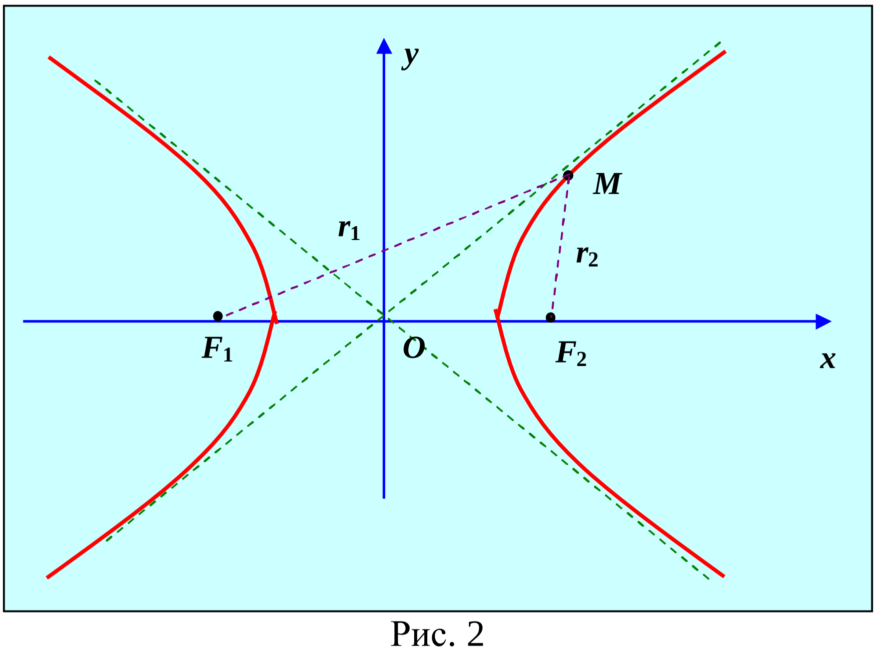

Рис. 2

Выведем каноническое уравнение гиперболы по аналогии с выводом уравнения эллипса, пользуясь теми же обозначениями.

$|r_1 - r_2| = 2a$, откуда

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Если обозначить $b^2 = c^2 - a^2$, отсюда можно получить

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad - \qquad (2)$$

каноническое уравнение гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина $e = c / a$. *Директрисой* D_i гиперболы, отвечающей фокусу F_i, называется прямая, расположенная в одной полуплоскости с F_i относительно оси Oy перпендикулярно оси Ox на расстоянии a / e от начала координат.

Свойства гиперболы:

1) Гипербола имеет две оси симметрии (главные оси гиперболы) и центр симметрии (центр гиперболы). При этом одна из этих осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых вершинами гиперболы. Она называется действительной осью гиперболы (ось Ox для канонического выбора координатной системы). Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее мнимой осью (в канонических координатах – ось Oy). По обе стороны от нее расположены правая и левая ветви гиперболы. Фокусы гиперболы располагаются на ее действительной оси.
2) Ветви гиперболы имеют две асимптоты, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

3) Наряду с гиперболой (2) можно рассмотреть так называемую сопряженную гиперболу, определяемую каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

для которой меняются местами действительная и мнимая ось с сохранением тех же асимптот.

4) Эксцентриситет гиперболы $e > 1$.

5) Отношение расстояния r_i от точки гиперболы до фокуса F_i к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.

Доказательство можно провести так же, как и для эллипса.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой. Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая – ее *директрисой*.

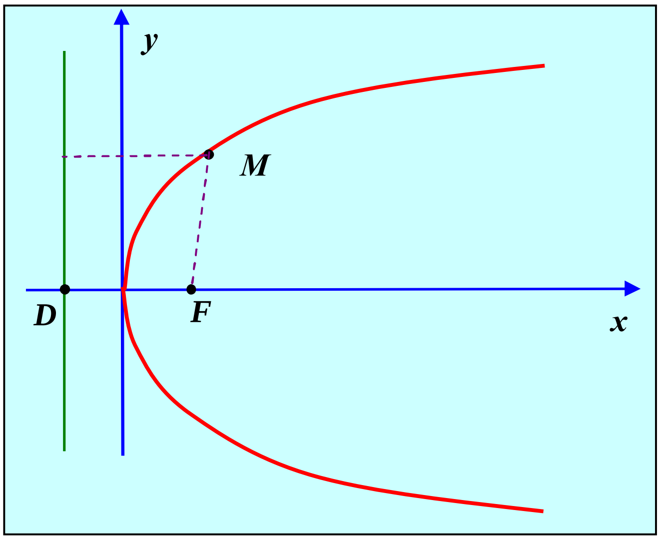

Рис. 3

Для вывода уравнения параболы выберем декартову систему координат так, чтобы ее началом была середина перпендикуляра *FD*, опущенного из фокуса на директрису, а координатные оси располагались параллельно и перпендикулярно директрисе. Пусть длина отрезка *FD* равна *p*. Тогда из равенства $r = d$ следует, что

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\frac{p}{2}+x,$$

поскольку

$$r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}, \quad d=\frac{p}{2}+x.$$

Алгебраическими преобразованиями это уравнение можно привести к виду:

$$y^2 = 2px, \qquad (3)$$

называемому *каноническим уравнением параболы*. Величина *p* называется *параметром* параболы.

Свойства параболы:

1) Парабола имеет ось симметрии (ось параболы). Точка пересечения параболы с осью называется вершиной параболы. Если парабола задана каноническим уравнением, то ее осью является ось *Ox*, а вершиной – начало координат.
2) Вся парабола расположена в правой полуплоскости плоскости *Oxy*.

Замечание. Используя свойства директрис эллипса и гиперболы и определение параболы, можно доказать следующее утверждение:
Множество точек плоскости, для которых отношение *e* расстояния до некоторой фиксированной точки к расстоянию до некоторой прямой есть

величина постоянная, представляет собой эллипс (при e<1), гиперболу (при e>1) или параболу (при e=1).

Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Линия, определяемая общим уравнением второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (4)$$

называется *алгебраической линией второго порядка*.

Для квадратичной формы $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ можно задать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы перейти к новой системе координат, в которой уравнение линии будет иметь канонический вид, необходимо провести два преобразования:

1) поворот координатных осей на такой угол, чтобы их направление совпало с направлением осей симметрии кривой (если она имеет две оси);
2) параллельный перенос, при котором начало координат совмещается с центром симметрии кривой (если он существует).

Замечание. Для параболы новые оси координат должны располагаться параллельно и перпендикулярно директрисе, а начало координат – совпасть с вершиной параболы.

Поскольку в канонических уравнениях кривых второго порядка отсутствуют произведения переменных, необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы A. В этом базисе уравнение (4) примет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\tilde{b}_1 x' + 2\tilde{b}_2 y' + \tilde{c} = 0$$

(в предположении, что $\lambda_{1,2}$ не равны 0).

Зададим последующий параллельный перенос формулами:

$$x'' = x' + \frac{\tilde{b}_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{\tilde{b}_2}{\lambda_2}..$$

Получим в новой координатной системе уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \tilde{\tilde{c}}. \qquad (5)$$

Рассмотрим возможные геометрические образы, определяемые этим уравнением в зависимости от знаков λ_1, λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$:

1) если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$ одного знака, уравнение (5) представляет собой каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1, \quad \text{где} \quad a=\sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{\lambda_1}}, b=\sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{\lambda_2}}$$

(случаи $\tilde{\tilde{c}}=0$ и $\tilde{\tilde{c}}$, имеющего знак, противоположный знаку λ_1, λ_2, будут рассмотрены позднее).

2) если λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, уравнение (5) является каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=-1,$$

в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$.

В случае, когда одно из собственных чисел матрицы A равно 0, уравнение (4) в результате двух преобразований координат можно привести к виду:

$$y''^2=2\tilde{\tilde{b}}x'',$$

являющимся каноническим уравнением параболы.

Пример 1.

Приведем к каноническому виду уравнение второго порядка

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Матрица квадратичной формы $3x^2 + 10xy + 3y^2$ имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные числа и собственные векторы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0, \lambda^2-6\lambda-16=0, \lambda_1=8, \lambda_2=-2.$$

Для координат собственного вектора e_1, соответствующего λ_1, получим с учетом нормировки:

$$\begin{cases} -5x_1+5y_1=0 \\ x_1^2+y_1^2=1 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \mathrm{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Аналогично найдем e_2:

$$\begin{cases} 5x_2+5y_2=0 \\ x_2^2+y_2^2=1 \end{cases}, \quad \mathrm{e}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Составим матрицу перехода к новому базису, столбцами которой будут координаты собственных векторов:

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{x}' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{y}' \end{cases}.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим его вид в новой системе координат:

$$8\boldsymbol{x}'^2 - 2\boldsymbol{y}'^2 - 8\sqrt{2}\boldsymbol{x}' - 6\sqrt{2}\boldsymbol{y}' - 13 = 0.$$

Заметим, что коэффициентами при x^2 и y^2 являются $\square_1$ и $\square_2$.

Преобразуем полученное уравнение:

$$8(\boldsymbol{x}'^2 - \sqrt{2}\boldsymbol{x}' + \frac{1}{2}) - 2(\boldsymbol{y}'^2 + 3\sqrt{2}\boldsymbol{y}' + \frac{9}{2}) - 8 = 0,$$

$$8(\boldsymbol{x}' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 2(\boldsymbol{y}' + \frac{3}{\sqrt{2}})^2 = 8.$$

Зададим параллельный перенос формулами:

$$\boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x}' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{y}' + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Получим уравнение:

$$8\boldsymbol{x}''^2 - 2\boldsymbol{y}''^2 = 8,$$

а после деления на 8:

$$\boldsymbol{x}''^2 - \frac{\boldsymbol{y}''^2}{4} = 1 \quad -$$

каноническое уравнение гиперболы.

Классификация кривых второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второго порядка (4):

$$\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{y}^2 + 2\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c} = 0$$

и выясним, какие геометрические образы на плоскости могут задаваться этим уравнением.

1. Если собственные числа матрицы A $\square_1$ и $\square_2$ одного знака, уравнение (4) называется уравнением *эллиптического типа*. Его можно привести к виду (5):

$$l_1\boldsymbol{x}''^2 + l_2\boldsymbol{y}''^2 = \tilde{\tilde{c}},$$

которое, в свою очередь, преобразуется в следующую форму:

а) если $\tilde{\tilde{c}}$ имеет тот же знак, что и $\square_{1,2}$, при делении на $\tilde{\tilde{c}}$ получаем

$$\frac{\boldsymbol{x}''^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{\boldsymbol{y}''^2}{\boldsymbol{b}^2} = 1 \quad -$$

каноническое уравнение *эллипса*.

б) если $\tilde{\tilde{c}}$ =0, уравнение

$$l_1\boldsymbol{x}''^2 + l_2\boldsymbol{y}''^2 = 0$$

имеет единственное решение:

$$x'' = y'' = 0,$$

определяющее *точку на плоскости*.

в) если знак $\tilde{\tilde{c}}$ противоположен знаку $\lambda_{1,2}$, уравнение после деления на $\tilde{\tilde{c}}$ примет вид:

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1.$$

Множество его решений пусто (иногда это пустое множество называют *мнимым эллипсом*).

2. Если собственные числа матрицы A λ_1 и λ_2 разных знаков, уравнение (4) называется уравнением *гиперболического типа*.

а) при $\tilde{\tilde{c}} \neq 0$ оно сводится к одному из двух видов:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \quad \textit{или} \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = -1,$$

в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$. Оба этих уравнения определяют *гиперболу*.

б) При $\tilde{\tilde{c}}$ =0 получаем уравнение

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0,$$

эквивалентное двум линейным уравнениям:

$$\frac{x''}{a} = \frac{y''}{b} \quad \textit{и} \quad \frac{x''}{a} = -\frac{y''}{b},$$

задающим *пару пересекающихся прямых*.

3. Если одно из собственных чисел равно 0, уравнение (4) называется уравнением *параболического типа*, и его можно привести к одному из следующих видов:

а) к уравнению

$$y''^2 = 2bx'',$$

определяющему *параболу*;

б) к уравнению

$$y''^2 = 2b^2, \quad \textit{или} \quad y'' = \pm b\sqrt{2},$$

задающему *пару параллельных прямых*;

в) к уравнению

$$y''^2 = 0,$$

определяющему *одну прямую* (или пару совпадающих прямых);

г) к уравнению

$$y''^2 = -2b^2,$$

не имеющему решений и, следовательно, не определяющему никакого геометрического образа.

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz +$$
$$+2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \qquad (6)$$

– уравнению второй степени от трех неизвестных, называемому *общим уравнением поверхности второго порядка*.

Если найти собственные числа и нормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

и перейти к системе координат, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов, уравнение (6) можно привести к одному из следующих видов:

1. Если $\square_1$, $\square_2$, $\square_3$ – одного знака, уравнение (6) есть уравнение эллиптического типа и приводится к канонической форме:

$$\boldsymbol{a})\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad - \qquad (7)$$

каноническое уравнение *эллипсоида*.

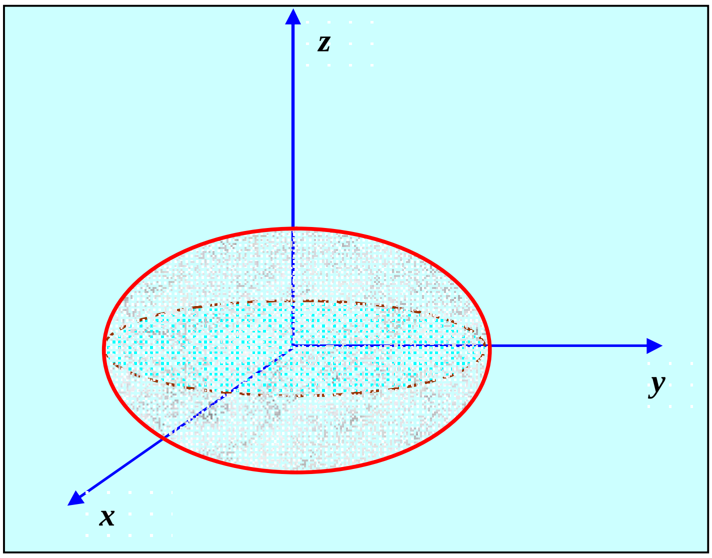

Рис. 4

Замечание. Если два собственных числа совпадают, эллипсоид называется эллипсоидом вращения и представляет собой поверхность, полученную в результате вращения эллипса вокруг одной из его осей. Если все собственные числа равны, уравнение (7) становится уравнением сферы.

$$б)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad -$$

уравнение задает *точку в пространстве*;

$$в)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad -$$

пустое множество.

2. Если собственные числа разных знаков, уравнение (12.6) приводится к каноническому виду:

$$а)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad - \qquad (8)$$

каноническое уравнение *однополостного гиперболоида*,

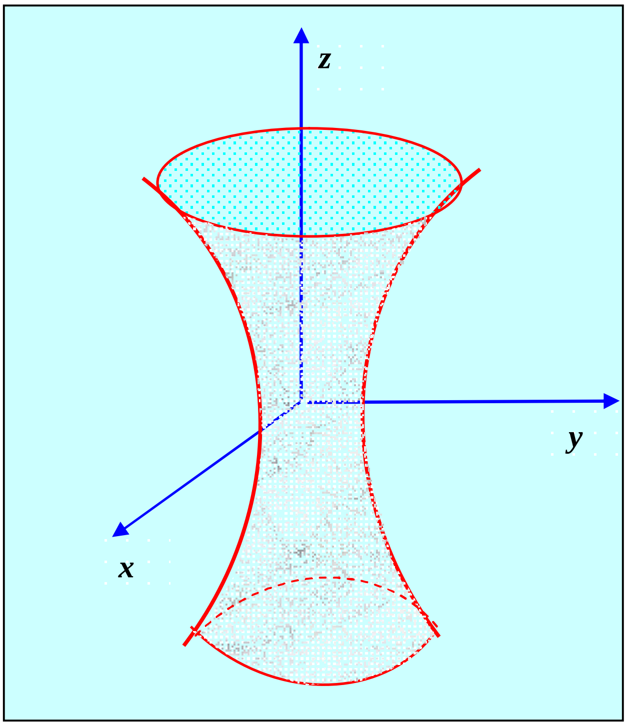

Рис. 5

$$б)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad - \qquad (9)$$

каноническое уравнение *двуполостного гиперболоида*,

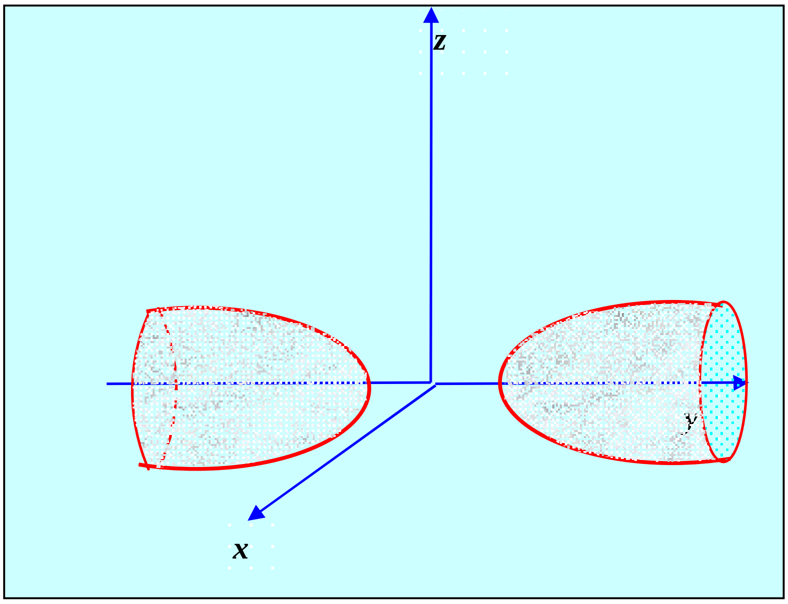

Рис. 6

$$в)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad - \qquad (10)$$

уравнение *конуса второго порядка*.

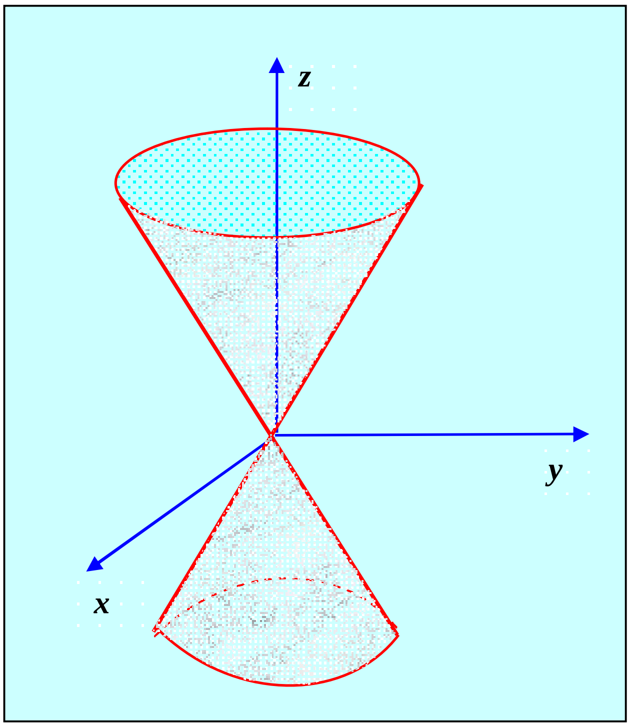

Рис. 7

3. Одно из собственных чисел равно 0. При этом с помощью преобразований координат можно получить следующие формы уравнения (6):

$$а)\quad z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad - \qquad (11)$$

каноническое уравнение *эллиптического параболоида*,

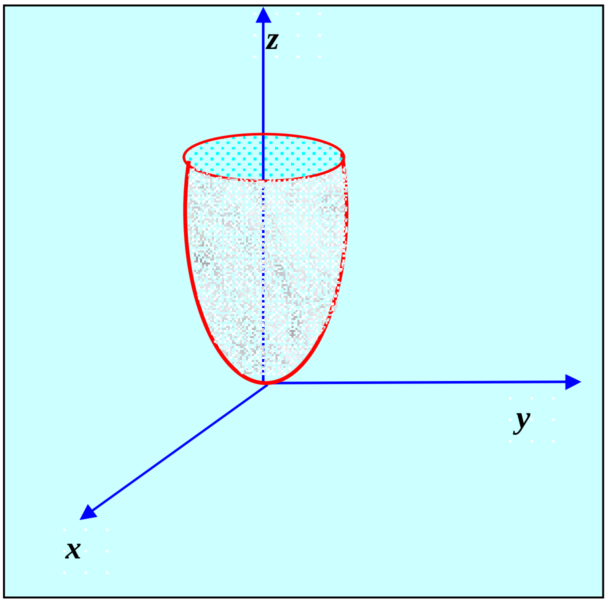

Рис. 8

$$б) \quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad - \qquad (12)$$

каноническое уравнение *гиперболического параболоида*

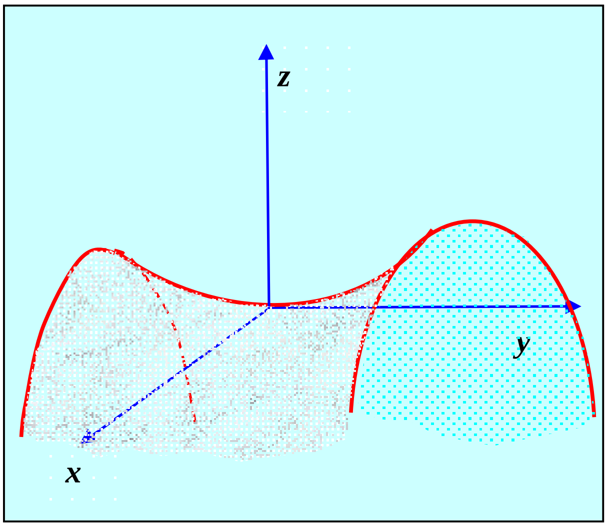

Рис. 9

и уравнения цилиндрических поверхностей:

$$в) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \qquad (13)$$

эллиптический цилиндр,

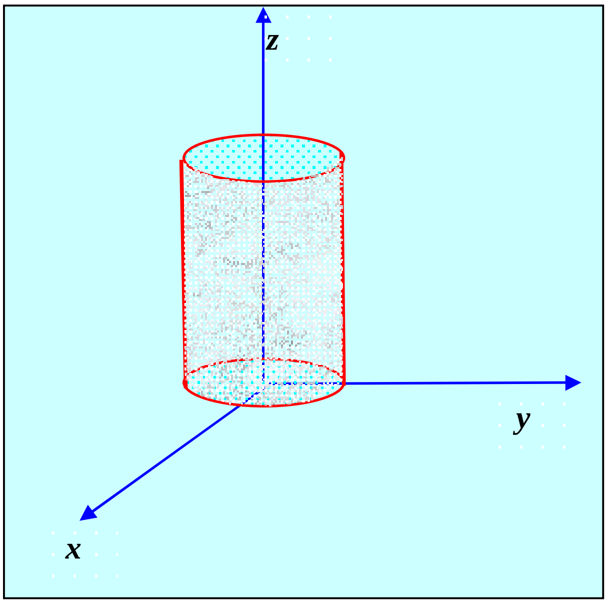

Рис. 10

$$г)\quad \frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}=1 \quad - \qquad (14)$$

гиперболический цилиндр.

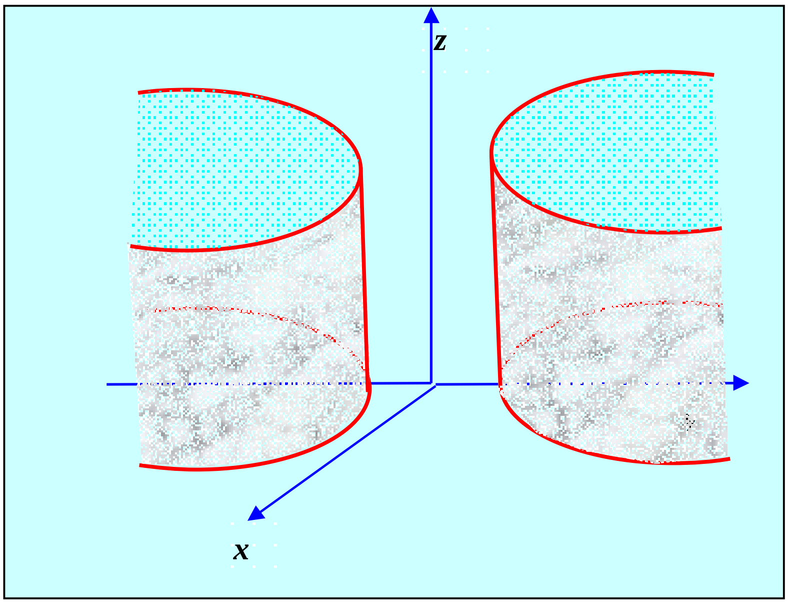

Рис 11

Наконец, уравнение может определять **пару плоскостей**:

$$д)\quad \frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}=0. \qquad (15)$$

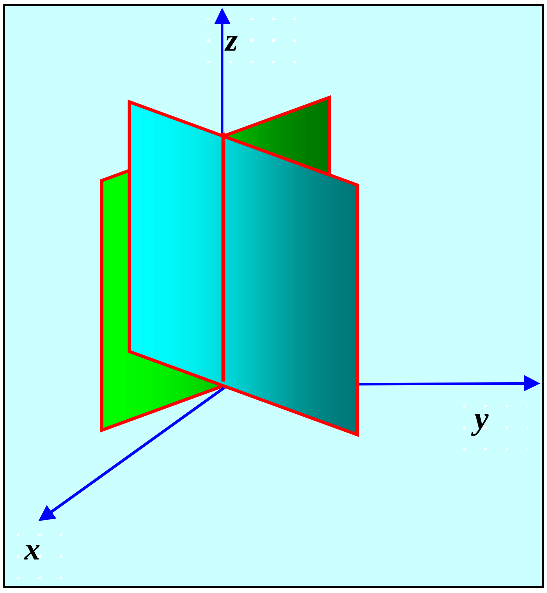

Рис. 12

4. Если два собственных числа равны 0, уравнение (6) приводится к одному из следующих видов:

$$а)\quad \boldsymbol{a}_{33}\boldsymbol{z}^2 + 2\boldsymbol{q}\boldsymbol{y} = 0 \quad - \qquad (16)$$

параболический цилиндр,

$$б)\quad \boldsymbol{a}_{33}\boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{r}^2 = 0 \quad - \qquad (17)$$

пара параллельных плоскостей,

$$в)\quad \boldsymbol{a}_{33}\boldsymbol{z}^2 + \boldsymbol{r}^2 = 0 \quad -$$

пустое множество.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ
«*Кривые 2-го порядка*»

Задача 1.

Определить тип уравнения кривой 2-го порядка:

$$2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0.$$

Указание

Если $\square_1 \cdot \square_2 > 0$, то уравнение эллиптического типа;
если $\square_1 \cdot \square_2 < 0$, то уравнение гиперболического типа;
если $\square_1 \cdot \square_2 = 0$, то уравнение параболического типа.

Решение

Ответ на вопрос задачи зависит от знаков собственных чисел матрицы квадратичной формы их старших членов левой части уравнения:
Матрица квадратичной формы $2x^2 + 10xy + 12y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix},$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-l & 5 \\ 5 & 12-l \end{vmatrix} = 0, \quad l^2 - 14l - 1 = 0.$$

По теореме Виета $\square_1 \cdot \square_2 = -1 < 0$, следовательно, уравнение гиперболического типа.

Ответ: уравнение гиперболического типа.

Задача 2.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

Указание

В уравнении отсутствует произведение xy, следовательно, квадратичная форма его старших членов имеет канонический вид; поэтому коэффициенты при x^2 и y^2 являются собственными числами матрицы квадратичной формы. Итак, $\square_1 = 4$, $\square_2 = 9$, $\square_1 \cdot \square_2 > 0$, следовательно, перед нами уравнение эллиптического типа.

Решение

В уравнении отсутствует произведение xy, следовательно, квадратичная форма его старших членов имеет канонический вид; поэтому коэффициенты при x^2 и y^2 являются собственными числами матрицы квадратичной формы. Итак, $\square_1 = 4$, $\square_2 = 9$, $\square_1 \cdot \square_2 > 0$, следовательно, перед нами уравнение эллиптического типа.

Геометрические образы, определяемые уравнением эллиптического типа:
- *эллипс;*
- *точка;*
- *пустое множество («мнимый эллипс»).*

Для приведения уравнения к каноническому виду нужно исключить из него слагаемые. Содержащие первые степени переменных. Для этого преобразуем левую часть:

$$(4\boldsymbol{x}^2 - 40\boldsymbol{x}) + (9\boldsymbol{y}^2 + 36\boldsymbol{y}) + 100 = 0,$$

$$4(\boldsymbol{x}^2 - 10\boldsymbol{x}) + 9(\boldsymbol{y}^2 + 4\boldsymbol{y}) + 100 = 0,$$

$$4(\boldsymbol{x}^2 - 10\boldsymbol{x} + 25) - 100 + 9(\boldsymbol{y}^2 + 4\boldsymbol{y} + 4) - 36 + 100 = 0,$$

$$4(\boldsymbol{x} - 5)^2 + 9(\boldsymbol{y} + 2)^2 = 36.$$

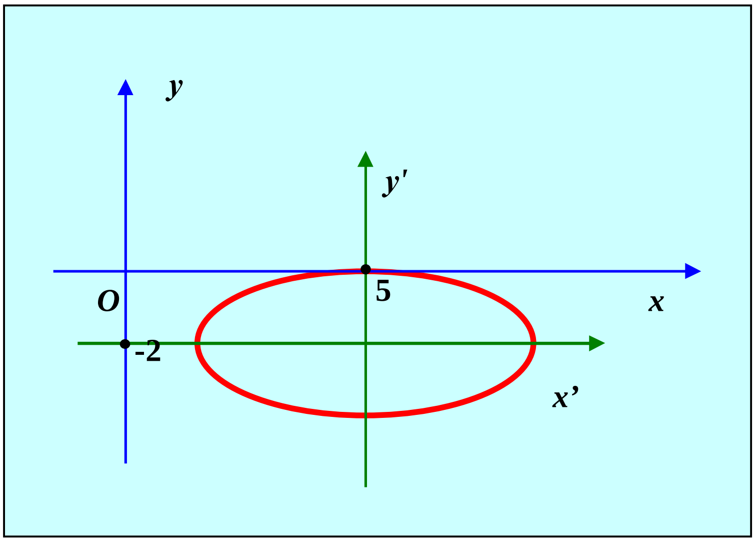

Рис. 13

Зададим параллельный перенос осей координат:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - 5 \\ \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + 2 \end{cases}.$$

Тогда в новых координатах уравнение примет вид:

$$4\boldsymbol{x}'^2 + 9\boldsymbol{y}'^2 = 36 \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x}'^2}{9} + \frac{\boldsymbol{y}'^2}{4} = 1 -$$

каноническое уравнение эллипса.

Ответ: уравнение эллипса, канонический вид $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$.

Задача 3.

Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

Указание

Собственные числа имеют разные знаки, значит, тип уравнения – гиперболический.

Геометрические образы, определяемые уравнением гиперболического типа:

- гипербола;
- пара пересекающихся прямых.

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 32 - l & 26 \\ 26 & -7 - l \end{vmatrix} = 0,$$

$$l^2 - 25l - 900 = 0, \quad l_1 = -20, \quad l_2 = 45.$$

Собственные числа имеют разные знаки, значит, тип уравнения – гиперболический.

Геометрические образы, определяемые уравнением гиперболического типа:
- гипербола;
- пара пересекающихся прямых.

Заметим, что для данного уравнения нет необходимости искать явный вид преобразования координат, приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Это связано с тем, что уравнение не содержит линейных членов, а его свободный член не изменится при преобразовании вида

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{b}_2\boldsymbol{x}' \end{cases}.$$

Найденные собственные числа будут коэффициентами при x^2 и y^2 для канонического вида квадратичной формы. Следовательно, в соответствующей координатной системе уравнение примет вид:

$$-20\boldsymbol{x}'^2 + 45\boldsymbol{y}'^2 + 180 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\boldsymbol{x}'^2 - 45\boldsymbol{y}'^2 = 180 \Rightarrow \frac{\boldsymbol{x}'^2}{9} - \frac{\boldsymbol{y}'^2}{4} = 1 -$$

каноническое уравнение гиперболы.

Ответ: уравнение гиперболического типа, канонический вид
$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$.

Задача 4.
Привести уравнение к каноническому виду и указать геометрический образ, который оно определяет:

$$7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0.$$

Указание

Перед нами полное уравнение 2-го порядка, и для приведения его к каноническому виду потребуется провести оба преобразования координатных осей: поворот на такой угол, чтобы новые оси стали параллельными собственным векторам матрицы квадратичной формы (это преобразование квадратичной формы к каноническому виду), и параллельный перенос.

Решение

Перед нами полное уравнение 2-го порядка, и для приведения его к каноническому виду потребуется провести оба преобразования координатных осей: поворот на такой угол, чтобы новые оси стали параллельными собственным векторам матрицы квадратичной формы (это преобразование квадратичной формы к каноническому виду), и параллельный перенос.

1) Поворот:

$$A=\begin{pmatrix}7 & 30\\ 30 & 32\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}7-\lambda & 30\\ 30 & 32-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$\lambda^2-39\lambda-676=0,\ \lambda_1=52,\ \lambda_2=-13.$$

Итак, тип уравнения – гиперболический.

Собственные векторы:

$$\vec{r}_1=\{x_1;y_1\},\ -45x_1+30y_1=0,\ y_1=\frac{3}{2}x_1,$$

$$\vec{r}_1=c\{2;\ 3\},\ |\vec{r}_1|=1\Rightarrow\vec{r}_1=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}.$$

$$\vec{r}_2=\{x_2;y_2\},\ 20x_2+30y_2=0,\ x_2=-\frac{3}{2}y_2,$$

$$\vec{r}_2=c\{-3;\ 2\},\ |\vec{r}_2|=1\Rightarrow\vec{r}_2=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}.$$

Матрица перехода к новому базису:

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}}\\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix},$$

преобразование координат:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x'-3y')\\ y=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'+2y')\end{cases}.$$

Собственные векторы следует выбирать так, чтобы определитель матрицы перехода равнялся +1 – при этом не нарушается взаимное расположение координатных осей.

Запишем исходное уравнение в новых координатах:

$$\frac{7}{13}(4x'^2-12x'y'+9y'^2)+\frac{60}{13}(2x'-3y')(3x'+2y')+$$
$$+\frac{32}{13}(9x'^2+12x'y'+4y'^2)-\frac{14}{\sqrt{13}}(2x'-3y')-\frac{60}{\sqrt{13}}(3x'+2y')+7=0,$$
$$52x'^2-13y'^2-16\sqrt{13}x-6\sqrt{13}y+7=0,$$
$$52\left(x'^2-\frac{4}{\sqrt{13}}x'+\frac{4}{13}\right)-16-13\left(y'^2+\frac{6}{\sqrt{13}}y+\frac{9}{13}\right)+9+7=0,$$
$$52\left(x'-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2-13\left(y'+\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2=0.$$

2) Параллельный перенос:
$$\begin{cases} x''=x'-\dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ y''=y'+\dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

В новых координатах получаем уравнение
$$52x''^2-13y''^2=0,\quad y''^2=4x''^2,\quad y''=\pm 2x'' \quad -$$
пара пересекающихся прямых.

Ответ: уравнение гиперболического типа, определяет пару пересекающихся прямых, канонический вид: $y'' = \pm\, 2x''$.

Задача 5.

Не проводя преобразования координат, установить, что уравнение
$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$$
определяет прямую, и найти уравнение этой прямой.

Указание

Обратите внимание на то, что квадратичная форма, образованная старшими членами уравнения, является полным квадратом.

Решение

Иногда привести уравнение к простому виду удается с помощью алгебраических приемов. Представим левую часть уравнения в виде:
$$(x - 3y)^2 + 4(x - 3y) + 4 = 0,\ \ ((x - 3y) + 2)^2 = 0,\ \ x - 3y + 2 = 0.$$

Ответ: уравнение определяет прямую $x - 3y + 2 = 0$.

Задача 6.

Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки
$$M=\left\{2\sqrt{3},\sqrt{6}\right\} \quad и \quad A=\{6,0\}.$$

Найти его эксцентриситет.

Указание

По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид, а во-вторых, полуось *a* равна абсциссе точки *A*.

Решение

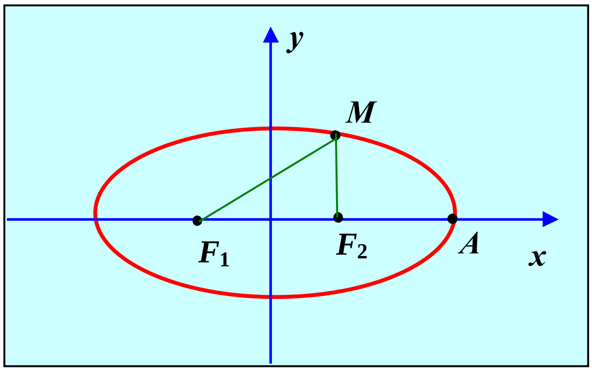

Рис. 14

По условию задачи оси координат являются осями симметрии эллипса, поэтому, во-первых, его уравнение имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а во-вторых, полуось a равна абсциссе точки A, т.е. $a = 6$. Найдем b, подставив в уравнение эллипса координаты точки M:

$$\frac{12}{36}+\frac{6}{b^2}=1,\quad \frac{6}{b^2}=\frac{2}{3},\quad b^2=9,\quad b=3.$$

Итак, уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Тогда расстояние от фокуса до начала координат

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

Вычислим эксцентриситет эллипса:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: эксцентриситет $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 7.

Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на прямой $y + 6 = 0$, эксцентриситет равен $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а точка $M(3; -1)$ является концом малой полуоси.

Указание

Найдите расстояние от точки M до прямой $y + 6 = 0$, т.е. длину малой полуоси эллипса. Центром симметрии эллипса будет точка O пересечения прямых F_1F_2 ($y + 6 = 0$) и MO, проходящей через точку M перпендикулярно F_1F_2.

Решение

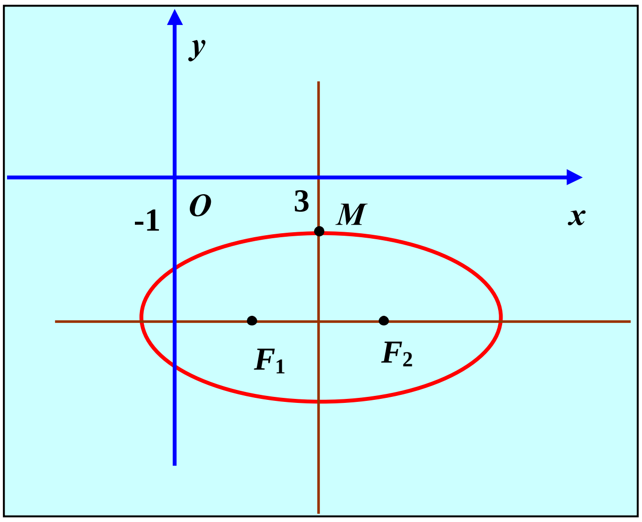

Рис. 15

Найдем расстояние от точки M до прямой $y + 6 = 0$, т.е. длину малой полуоси эллипса. Нормальный вид уравнения данной прямой: $-y - 6 = 0$, тогда

$$d_M = |-(-1) - 6| = |1 - 6| = 5.$$

Центром симметрии эллипса будет точка O пересечения прямых F_1F_2 ($y + 6 = 0$) и MO, проходящей через точку M перпендикулярно F_1F_2.

Поскольку прямая F_1F_2 параллельна оси абсцисс, прямая MO параллельна оси ординат; следовательно, ее уравнение: $x = 3$. Тогда координаты точки O: $O(3; -6)$.

С учетом расположения осей эллипса можно утверждать, что в системе координат, полученной параллельным переносом начала координат в точку $O(3; -6)$, то есть заданной преобразованием

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 6 \end{cases},$$

уравнение эллипса имеет канонический вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Найдем a из условия, что

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - 25}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{a^2 - 25}{a^2} = \frac{1}{2}, \quad a^2 = 50.$$

Подставим найденные значения a и b в уравнение эллипса:

$$\frac{\boldsymbol{x}'^2}{50}+\frac{\boldsymbol{y}'^2}{25}=1\Rightarrow \boldsymbol{x}'^2+2\boldsymbol{y}'^2=50\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{x}-3)^2+2(\boldsymbol{y}+6)^2=50\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^2-6\boldsymbol{x}+9+2\boldsymbol{y}^2+24\boldsymbol{y}+72-50=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{y}^2-6\boldsymbol{x}+24\boldsymbol{y}+31=0.$$

Ответ: уравнение эллипса: $x^2 + 2y^2 – 6x + 24y + 31 = 0$.

Задача 8.
Дана гипербола

$$16x^2 – 9y^2 = 144.$$

Составить уравнения директрис гиперболы.

Указание

Приведите уравнение гиперболы к каноническому виду и составьте уравнения директрис в виде

$$\boldsymbol{x}=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{e},\quad e=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}.$$

Решение

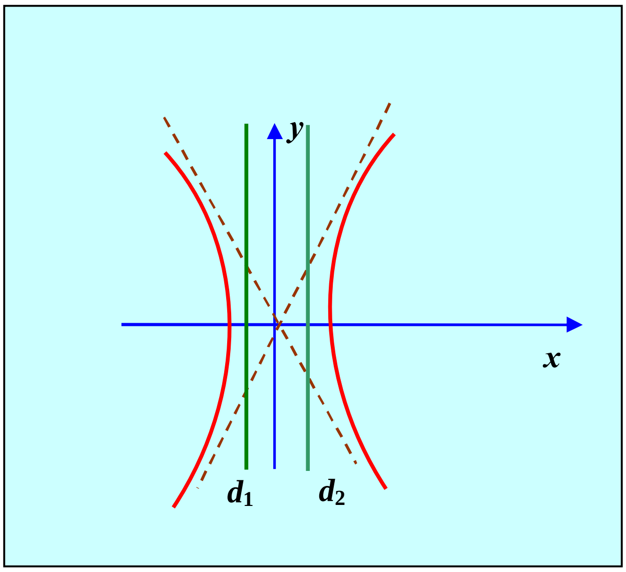

Рис. 16

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{9}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{16}=1.$$

Осями симметрии являются координатные оси, $a = 3$, $b = 4$. Тогда

$$\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{O}=\boldsymbol{c}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{9+16}=5;\quad e=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}=\frac{5}{3}.$$

Уравнения директрис:

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{\boldsymbol{a}}{e} = \pm 3 : \frac{5}{3} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \pm\frac{9}{5}.$$

Ответ: уравнения директрис: $x = \pm\frac{9}{5}$.

Задача 9.
Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Указание

Найдите вначале координаты вершин и фокусов эллипса, а затем определите коэффициенты a и b в каноническом уравнении гиперболы.

Решение

Координаты вершин гиперболы: (a; 0) и (-a; 0), координаты фокусов: (c; 0) и (–c; 0). Соответственно координаты вершин эллипса: (a_1; 0) и (-a_1; 0), координаты фокусов: (c_1; 0) и (-c_1; 0). У данного эллипса $a_1 = 5$,

$$\boldsymbol{c}_1 = \sqrt{\boldsymbol{a}_1^2 - \boldsymbol{b}_1^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогда для гиперболы $a = 4$, $c = 5$, откуда

$$\boldsymbol{b} = \sqrt{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3, ,$$

и уравнение гиперболы:

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{16} - \frac{\boldsymbol{y}^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Задача 10.
Составить уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{9} - \frac{\boldsymbol{y}^2}{4} = 1$$

в ее точке $M=\{15;\, 4\sqrt{6}\,\}$.

Указание

Найдите вначале координаты нормали к гиперболе в точке M (если кривая задана уравнением $F(x,y) = 0$, то нормаль к ней в точке $M_0=\{x_0;y_0\}$ имеет координаты: $\boldsymbol{n} = (F'_x(x_0;y_0);F'_y(x_0;y_0))$), а затем составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M=\{15;\, 4\sqrt{6}\,\}$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$.

Решение

Найдем координаты нормали к гиперболе в точке M.

> *Если кривая задана уравнением $F(x,y) = 0$, то нормаль к ней в точке $M_0=\{x_0;y_0\}$ имеет координаты:* $\boldsymbol{n} = (F'_x(x_0;y_0);F'_y(x_0;y_0))$.

$$F'_x = \frac{2\boldsymbol{x}}{9},\ F'_y = -\frac{2\boldsymbol{y}}{4} = -\frac{\boldsymbol{y}}{2},\ F'_x(15;\ 4\sqrt{6}) = \frac{2\cdot 15}{9} = \frac{10}{3},$$

$$F'_y(15;\ 4\sqrt{6}) = -\frac{4\sqrt{6}}{2} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \mathrm{n} = \left\{\frac{10}{3}; -2\sqrt{6}\right\}.$$

> *Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = \{A, B\}$, имеет вид:* $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$

Запишем уравнение касательной:

$$\frac{10}{3}(\boldsymbol{x}-15) - 2\sqrt{6}(\boldsymbol{y}-4\sqrt{6}) = 0,$$

$$\frac{10}{3}\boldsymbol{x} - 50 - 2\sqrt{6}\boldsymbol{y} + 48 = 0,\ 5\boldsymbol{x} - 3\sqrt{6}\boldsymbol{y} - 3 = 0.$$

Ответ: Уравнение касательной:

$$5\boldsymbol{x} - 3\sqrt{6}\boldsymbol{y} - 3 = 0.$$

Задача 11.

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

Указание

Используйте определение параболы: параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Решение

Используем определение параболы:

> ***Параболой** называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.*

Пусть точка $M(x, y)$ лежит на параболе. Тогда ее расстояние до фокуса

$$\boldsymbol{MF} = \sqrt{(\boldsymbol{x}-2)^2 + (\boldsymbol{y}+1)^2}.$$

Выразим через x и y расстояние от точки M до директрисы.
Нормальное уравнение директрисы:

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0; \quad \boldsymbol{d_M} = \left|\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - 1}{\sqrt{2}}\right|.$$

Из определения параболы $d_M = MF$,

$$\left|\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - 1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{(\boldsymbol{x}-2)^2 + (\boldsymbol{y}+1)^2};$$

$$\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - 1)^2}{2} = (\boldsymbol{x}-2)^2 + (\boldsymbol{y}+1)^2,$$

$$\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^2 - 6\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + 9 = 0.$$

Ответ: уравнение параболы: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

Задача 12.
Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку A=\{9; 6\}. Найти координаты ее фокуса.

Указание

Из условий задачи следует, что данная парабола задается каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Подставьте в это уравнение координаты точки A и найдите значение параметра p параболы.

Решение

Из условий задачи следует, что данная парабола задается каноническим уравнением

$$y^2 = 2px.$$

Подставим в это уравнение координаты точки A: $36 = 2p\cdot 9$, откуда $p = 2$.
Следовательно, уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 4x$.
Координаты фокуса параболы задаются формулой: $\boldsymbol{F}=\{0{,}5\boldsymbol{p};\ 0\}$, то есть $\boldsymbol{F}=\{1;\ 0\}$.

Ответ: уравнение параболы: $y^2 = 4x$; фокус $\boldsymbol{F}=\{1;\ 0\}$.

ГЛОССАРИЙ

базисный минор – ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы
вектор – направленный отрезок
векторное произведение векторов – вектор, перпендикулярный обоим сомножителям, образующий с ними правую тройку, модуль которого равен произведению модулей сомножителей на синус угла между ними
гипербола – множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до некоторых двух фиксированных точек есть величина постоянная
канонические уравнения прямой – уравнения, использующие координаты направляющего вектора прямой
канонический вид квадратичной формы – квадратичная форма. не содержащая произведения переменных
квадратичная форма действительных переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ – многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени
коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой
компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости
кривые второго порядка – линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину (эллипс, гипербола, парабола)
линейная комбинация – результат применения линейных операций
линейное уравнение – уравнение, в которое неизвестные входят в виде линейной комбинации
линейные операции – сложение и умножение на число
матрица – прямоугольная таблица из чисел
минор матрицы – определитель, составленный из элементов матрицы, стоящих на пересечении любых ее k строк и k столбцов
направляющий вектор прямой – вектор, параллельный прямой
нормальное уравнение прямой (плоскости) – уравнение, коэффициенты которого вычисляются с помощью характеристик перпендикуляра, проведенного к прямой (плоскости) из начала координат
нормальный вектор прямой (плоскости) – вектор, перпендикулярный прямой (плоскости)
определенная система уравнений – система, имеющая единственное решение
определитель – число, поставленное в соответствие квадратной матрице
отклонение точки от прямой (плоскости) – расстояние от точки до прямой (плоскости), если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой (плоскости), или величина, противоположная по знаку, в противном случае
парабола – множество точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой

ранг матрицы – наибольший порядок ее ненулевого минора
симметрическая матрица – матрица, у которой равны элементы, симметричные относительно главной диагонали
скалярное произведение векторов – произведение модулей векторов, умноженное на косинус угла между ними
скалярный квадрат вектора – скалярное произведение вектора на себя
смешанное произведение трех векторов – скалярное произведение одного вектора на векторное произведение двух других
собственное число матрицы – число, для которого результат умножения матрицы на некоторый вектор равен его произведению на это число
собственный вектор матрицы – вектор, для которого умножение на матрицу равносильно умножению на число
совместная система уравнений – система, имеющая хотя бы одно решение
эллипс – множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до некоторых двух фиксированных точек есть величина постоянная

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A = \|\|a_{ij}\|\|$	Матрица A
$\sum_{j=1}^{n} a_j$	Сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$\|A\|$	Определитель квадратной матрицы
A^T	Транспонированная матрица
A^{-1}	Обратная матрица
E	Единичная матрица
rg A	Ранг матрицы
$\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}$	Вектор
$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$	Коллинеарные векторы
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	Базис декартовой системы координат
$\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$	Координаты вектора
$A = \{ x_1, y_1, z_1\}$	Координаты точки
пр$_l \overrightarrow{AB}$	Проекция вектора на ось
$\vec{e}_a$	Орт вектора ***a***
$\|\boldsymbol{a}\|$	Модуль вектора
ab	Скалярное произведение векторов
[***a***,***b***]	Векторное произведение векторов
abc	Смешанное произведение векторов
□	Знак перпендикулярности
$\in$	знак принадлежности
$\Rightarrow$	знак следования
$\Leftrightarrow$	знак равносильности
$\cup$	знак объединения

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра – М.: Наука, 1999.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия – М.: Наука, 1999.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах – М.: Физматлит, 2001.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре – М.: Наука, 1984.
5. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре – М.: Наука, 1968.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 – М.: Высшая школа, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ