ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2021, т. 312, с. 216–223

УДК 517.984.64

Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям

Г. Г. Магарил-Ильяев[а,б,в], **К. Ю. Осипенко**[а,б,г], **Е. О. Сивкова**[д,е,в]

Поступило 25.05.2020; после доработки 18.08.2020; принято к публикации 24.08.2020

Рассматривается задача оптимального восстановления решения уравнения теплопроводности на многообразии, представляющем собой произведение прямой и окружности, в данный момент времени по неточным измерениям этого решения в другие моменты времени. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4139

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена задаче наилучшего восстановления решения уравнения теплопроводности на многообразии $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ ($\mathbb{T}$ — единичная окружность) в данный момент времени по приближенным измерениям этого решения в другие моменты времени. Многообразие $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ моделирует трубу, и в этом смысле задача состоит в том, чтобы наилучшим образом восстановить температуру трубы в момент времени τ по ее приближенным измерениям в моменты t_i, $i = 1, \ldots, n$. В работе найдено семейство линейных оптимальных методов восстановления температуры трубы, и при этом каждый метод использует не более двух измерений. Следует сказать, что результаты работы переносятся на случай многообразий вида $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$. Но чтобы не загромождать изложение, мы ограничились случаем, когда $n = m = 1$. Статья примыкает к кругу проблем, связанных с задачами оптимального восстановления значений линейных операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Сама тематика возникла в 1960-е годы, и начало ее было положено в работах [11–13]. Впоследствии основное внимание уделялось задачам восстановления функций и их производных по неточно заданному спектру и задачам оптимального восстановления решений уравнений математической физики (см., например, [1, 2, 4–9]). Настоящая работа относится ко второму циклу задач.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ мы имеем возможность измерить с известной погрешностью температуру трубы. Как по этой информации восстановить температуру трубы в момент времени $\tau \ne t_i$, $i = 1, \ldots, n$?

[а] Механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

[б] Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва, Россия.

[в] Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия.

[г] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.

[д] Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия.

[е] Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия.

E-mail: magaril@mech.math.msu.su (Г.Г. Магарил-Ильяев), kosipenko@yahoo.com (К.Ю. Осипенко), sivkova_elena@inbox.ru (Е.О. Сивкова).

Точная постановка такова. Распространение тепла на многообразии $M=\mathbb{R}\times\mathbb{T}$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}, \tag{2.1}$$

где $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{T}$ и $t\ge 0$, с начальной функцией $f(\cdot)$ переменных (x,y).

Мы предполагаем, что $f(\cdot)$ принадлежит $L_2(M)$. В этом случае для каждого $t>0$ существует единственное решение $u(\cdot,t)$ уравнения (2.1), принадлежащее $L_2(M)$ и сходящееся к $f(\cdot)$ в метрике $L_2(M)$ при $t\to 0$.

Пусть известны функции $g_i(\cdot)\in L_2(M)$ и числа $\delta_i>0$, $i=1,\dots,n$, такие, что

$$\|u(\cdot,t_i)-g_i(\cdot)\|_{L_2(M)}\le\delta_i,\qquad i=1,\dots,n.$$

Под задачей оптимального восстановления функции $u(\cdot,\tau)$ по данной информации понимается следующее. Всякий метод восстановления является отображением $\varphi\colon (L_2(M))^n\to L_2(M)$. Погрешностью метода φ называется величина

$$e_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta},\varphi)=\sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(M),\ g_i(\cdot)\in L_2(M),\ i=1,\dots,n\\ \|u(\cdot,t_i)-g_i(\cdot)\|_{L_2(M)}\le\delta_i,\ i=1,\dots,n}}\|u(\cdot,\tau)-\varphi(\overline{g}(\cdot))\|_{L_2(M)},$$

где $\overline{g}=(g_1(\cdot),\dots,g_n(\cdot))$ и $\overline{\delta}=(\delta_1,\dots,\delta_n)$.

Нас интересуют величина

$$E_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta})=\inf_{\varphi}e_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta},\varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon (L_2(M))^n\to L_2(M)$, и методы $\widehat{\varphi}$, на которых нижняя грань достигается, т.е. такие методы, что

$$E_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta})=e_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta},\widehat{\varphi}). \tag{2.2}$$

Величина $E_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta})$ называется *погрешностью оптимального восстановления*, а методы $\widehat{\varphi}$, для которых имеет место равенство (2.2), — *оптимальными методами восстановления*.

Аналогичная задача на прямой была рассмотрена в работе [5], и общая схема доказательства во многом похожа на используемую здесь. Однако наличие периодической составляющей существенно меняет отдельные этапы рассуждений.

Для формулировки теоремы нам понадобятся некоторые определения. Напомним, что преобразование Фурье F в $L_2(M)$ переводит функции из $L_2(M)$ в функции из $L_2(\widehat{M})$, где $\widehat{M}=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, и является изометрическим изоморфизмом этих пространств. Квадрат нормы функции $a(\cdot)\in L_2(\widehat{M})$ определяется по формуле

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\widehat{M}}|a(\xi,k)|^2\,d\xi\,dk=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}|a(\xi,k)|^2\,d\xi.$$

Если $g(\cdot)\in L_2(M)$, то $F[g](\cdot)$ обозначает преобразование Фурье функции $g(\cdot)$.

Далее, на двумерной плоскости (t,x) рассмотрим выпуклое множество

$$A=\operatorname{conv}\biggl\{\biggl(t_i,\ln\frac{1}{\delta_i}\biggr)\colon 1\le i\le n\biggr\}+\{(t,0)\colon t\ge 0\},$$

которое представляет собой алгебраическую сумму выпуклой оболочки конечного числа точек $(t_i,\ln(1/\delta_i))$, $i=1,\dots,n$, и положительной полупрямой.

Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0,\infty)$ равенством $\theta(t)=\max\{x\colon (t,x)\in A\}$, причем $\theta(t)=-\infty$, если множество таких x пусто. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая неубывающая ломаная на $[t_1,\infty)$.

Обозначим через $t_{s_1} < \ldots < t_{s_k}$ ее точки излома (считая t_1 также точкой излома, т.е. $t_{s_1} = t_1$). Понятно, что если $k > 1$, то на $[t_{s_1}, t_{s_k}]$ функция $\theta(\cdot)$ возрастает, а на $[t_{s_k}, \infty)$ она константа, равная $\ln(1/\delta_{s_k})$.

Если $\tau \in (t_{s_i}, t_{s_{i+1}})$, $1 \le i \le k-1$, то положим

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{s_i} &= \widehat{\lambda}_{s_i}(\tau) = \frac{t_{s_{i+1}} - \tau}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}} \left(\frac{\delta_{s_i}}{\delta_{s_{i+1}}}\right)^{-2(\tau - t_{s_i})/(t_{s_{i+1}} - t_{s_i})}, \\ \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} &= \widehat{\lambda}_{s_{i+1}}(\tau) = \frac{\tau - t_{s_i}}{t_{s_{i+1}} - t_{s_i}} \left(\frac{\delta_{s_i}}{\delta_{s_{i+1}}}\right)^{2(t_{s_{i+1}} - \tau)/(t_{s_{i+1}} - t_{s_i})}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Легко видеть, что это положительные числа, причем $\widehat{\lambda}_{s_i} < 1$.

Для данного τ определим еще положительное число

$$r_i = r_i(\tau) = -\frac{\ln \widehat{\lambda}_{s_i}}{\tau - y_{s_i}}$$

и введем обозначение $B(r_i) = \{(\xi, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \colon \xi^2 + k^2 \le r_i\}$.

Теорема 1. *Для любого $\tau > 0$ справедливо равенство*

$$E_\tau(\overline{g}(\cdot), \overline{\delta}) = e^{-\theta(\tau)}.$$

Если $\tau \in (t_{s_i}, t_{s_{i+1}})$, $1 \le i \le k-1$, то множество функций $a(\cdot)$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, измеримых для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и таких, что

$$\frac{|b(\xi,k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_i}} + \frac{|a(\xi,k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}} \le 1, \tag{2.4}$$

где

$$b(\xi,k) = e^{-(\xi^2+k^2)(\tau - y_{s_i})} - a(\xi,k) e^{-(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}} - t_{s_i})},$$

если $(\xi, k) \in B(r_i)$, и равных нулю вне $B(r_i)$, непусто. Для каждой такой функции $a(\cdot)$ метод $\widehat{\varphi}_a$, определенный формулой

$$\widehat{\varphi}_a(g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)) = (K_b * g_{s_i})(\cdot) + (K_a * g_{s_{i+1}})(\cdot), \tag{2.5}$$

где $F[K_b](\xi,k) = b(\xi,k)$ и $F[K_a](\xi,k) = a(\xi,k)$, является оптимальным.

Если $\tau > t_{s_k}$, то метод $\widehat{\varphi}$, определенный формулой $\widehat{\varphi}(g_1(\cdot), \ldots, g_n(\cdot)) = (K * g_{s_k})(\cdot)$, где $F[K](\xi) = e^{-(\xi^2+k^2)t_{s_k}}$, оптимален.

Заметим, что определение оптимальных методов корректно. Действительно, функция $a(\cdot)$ ограничена (как следует из (2.4)) и обращается в нуль за пределами некоторого шара. Следовательно, она принадлежит $L_2(\widehat{M})$ и, значит, является образом некоторой функции $K_a \in L_2(M)$. Аналогично получаем, что $K_b \in L_2(M)$, и поэтому свертка имеет смысл.

Отметим, что если $t_1 > 0$ и $0 < \tau < t_1$, то по определению $\theta(\tau) = -\infty$ и тем самым $E_\tau(\overline{g}(\cdot), \overline{\delta}) = +\infty$, т.е. "прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему".

Отметим еще, что оптимальные методы линейны, "сглаживают" наблюдения и используют информацию о не более чем двух измерениях.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Общая схема дальнейших рассуждений такова. Мы получим оценку снизу для величины $E_\tau(\overline{g}(\cdot), \overline{\delta})$ при любом $\tau > 0$, а затем покажем, что погрешность любого из методов (2.5) не превосходит этой оценки. Отсюда, очевидно, будет следовать, что данные методы оптимальны. Потом установим, что множество таких методов непусто.

Как уже отмечалось, для каждого $t > 0$ решение уравнения (2.1) однозначно определяется начальной функцией $f(\cdot)$, поэтому далее удобно писать $u(\cdot, t, f)$ вместо $u(\cdot, t)$.

Оценка снизу величины $E_\tau(\overline{g}(\cdot), \overline{\delta})$. Для погрешности оптимального восстановления справедлива следующая оценка:

$$E_\tau(\overline{g}(\cdot), \overline{\delta}) \geq \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(M) \\ \|u(\cdot,t_i,f)\|_{L_2(M)}\leq\delta_i,\ i=1,\dots,n}} \|u(\cdot, \tau, f)\|_{L_2(M)}. \tag{3.1}$$

Это общий факт, верный в значительно более общей ситуации, чем рассматривается здесь. Его доказательство см., например, в [5].

Нас интересует точное значение величины справа в (3.1). Оно есть значение экстремальной задачи

$$\|u(\cdot, \tau, f)\|_{L_2(M)} \to \max, \qquad \|u(\cdot, t_i, f)\|_{L_2(M)} \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, n, \qquad f(\cdot) \in L_2(M), \tag{3.2}$$

т.е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Если искать решение уравнения (2.1) методом Фурье (см., например, [3]), то нетрудно проверить, что

$$F[u(\cdot, t, f)](\xi, k) = e^{-(\xi^2+k^2)t} F[f](\xi, k)$$

для любого $t > 0$, п.в. $\xi \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда согласно теореме Планшереля

$$\int_M |u(x, y, t, f)|^2\, dx\, dy = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)t} |F[f](\xi, k)|^2\, d\xi.$$

Отсюда следует, что в образах Фурье квадрат значения задачи (3.2) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)\tau} |F[f](\xi, k)|^2\, d\xi \to \max, \\
\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_i} |F[f](\xi, k)|^2\, d\xi \leq \delta_i^2, \qquad i = 1, \dots, n, \\
f(\cdot) \in L_2(M).
\end{gathered} \tag{3.3}$$

При каждом $k \in \mathbb{Z}$ интегралы можно рассматривать как интегрирование по положительным мерам $d\mu_k(\xi) = (2\pi)^{-2}|F[f](\xi, k)|^2\, d\xi$ на $\mathbb{R}$, порожденным функциями $f(\cdot) \in L_2(M)$. Для нахождения значения данной задачи удобно рассмотреть более общую постановку, а именно следующую задачу на множестве всех положительных борелевских мер на $\mathbb{R}$:

$$\begin{gathered}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)\tau}\, d\mu_k(\xi) \to \max, \\
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_i}\, d\mu_k(\xi) \leq \delta_i^2, \qquad i = 1, \dots, n, \\
d\mu_k \geq 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Мы найдем значение этой задачи, которое, очевидно, не меньше значения задачи (3.3), а потом покажем, что на самом деле значения этих задач совпадают.

Задача (3.4) относительно переменной $\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ представляет собой задачу максимизации линейного функционала на выпуклом множестве. Для нахождения ее решения воспользуемся стандартными приемами.

Поставим в соответствие этой задаче функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\lambda)=-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2(\xi^2+k^2)\tau}\,d\mu_k(\xi)+\sum_{i=1}^n\lambda_i\Biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2(\xi^2+k^2)t_i}\,d\mu_k(\xi)-\delta_i^2\Biggr),$$

определенную на всех наборах $\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $d\mu_k$ — борелевские меры на $\mathbb{R}$, принимающие значения в $\mathbb{R}$, и всех наборах $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$, называемых множителями Лагранжа.

Согласно достаточным условиям в теореме Каруша–Куна–Таккера (см., например, [10]) если в задаче (3.4) существуют допустимый набор $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2,\dots,\widehat{\lambda}_n)$ такие, что выполнены условия

(а) $\min_{\{d\mu_k\ge0\}_{k\in\mathbb{Z}}}\mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda})=\mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda})$;

(б) $\widehat{\lambda}_i\ge0,\ 1\le i\le n$;

(в) $\widehat{\lambda}_i\bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}e^{-2(\xi^2+k^2)t_i}\,d\widehat{\mu}_k(\xi)-\delta_i^2\bigr)=0,\ i=1,\dots,n,$

то $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — решение задачи (3.4).

Анализируя условия (а)–(в), можно понять, какими должны быть $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\widehat{\lambda}$. Но, не проводя здесь этого анализа, предъявим сразу допустимый набор $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и набор множителей Лагранжа $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2,\dots,\widehat{\lambda}_n)$, удовлетворяющие условиям (а)–(в).

Пусть $\tau>0$ и $\tau\ne t_i$, $i=1,\dots,n$. Тогда либо $\tau\in(t_{s_i},t_{s_{i+1}})$ для некоторого $1\le i\le k-1$, либо $\tau>t_{s_k}$, либо $\tau<t_1$, если $t_1>0$. Рассмотрим первый случай.

Пусть $\tau\in(t_{s_i},t_{s_{i+1}})$, $1\le i\le k-1$. Определим вектор $\widehat{\lambda}=(\widehat{\lambda}_1,\dots,\widehat{\lambda}_n)$ так, что $\widehat{\lambda}_{s_i}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}$ — положительные числа, определенные в (2.3), и $\widehat{\lambda}_j=0$, если $j\ne s_i,s_{i+1}$.

Набор мер $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ определим следующим образом: $d\widehat{\mu}_k=0$, если $k\ne0$, и $d\widehat{\mu}_0=A\delta_{\xi_0}$, где δ_{ξ_0} — мера Дирака в точке ξ_0 такой, что

$$\xi_0^2=\frac{\ln(1/\delta_{s_{i+1}})-\ln(1/\delta_{s_i})}{t_{s_{i+1}}-t_{s_i}},\tag{3.5}$$

а

$$A=\delta_{s_i}^{2t_{s_{i+1}}/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}\,\delta_{s_{i+1}}^{-2t_{s_i}/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}.\tag{3.6}$$

Так как функция $\theta(\cdot)$, определенная выше, возрастает на $[t_{s_1},t_{s_k}]$, то числитель в формуле (3.5) положителен.

Нетрудно убедиться, что с такими $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\widehat{\lambda}$ выполнено условие (в), которое в данном случае имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-2\xi^2t_j}\,d\widehat{\mu}_0(\xi)=Ae^{-2\xi_0^2t_j}=\delta_j^2,\qquad j=s_i,s_{i+1}.\tag{3.7}$$

Проверим, что набор $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ допустим в задаче (3.4). Действительно, точки $(t_i,\ln(1/\delta_i))$, $i=1,\dots,n$, лежат не выше графика функции $\theta(\cdot)$, а так как это вогнутая функция, то ее график лежит не выше прямой

$$p(t)=\frac{\ln(1/\delta_{s_{i+1}})-\ln(1/\delta_{s_i})}{t_{s_{i+1}}-t_{s_i}}(t-t_{s_i})+\ln\frac{1}{\delta_{s_i}}=\ln\delta_{s_i}^{-(t_{s_{i+1}}-t)/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}\delta_{s_{i+1}}^{-(t-t_{s_i})/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})},$$

соединяющей точки $(t_{s_i}, \ln(1/\delta_{s_i}))$ и $(t_{s_{i+1}}, \ln(1/\delta_{s_{i+1}}))$. Тогда, учитывая выражения для ξ_0^2 и A, будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 t_i}\, d\widehat{\mu}_0(\xi) = Ae^{-2\xi_0^2 t_i} = \delta_{s_i}^{2(t_{s_{i+1}}-t_i)/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}\delta_{s_{i+1}}^{2(t_i-t_{s_i})/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})} =$$
$$= e^{-2p(t_i)} \le e^{-2\ln(1/\delta_i)} = \delta_i^2, \qquad i = 1,\dots,n,$$

т.е. набор $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ допустим в задаче (3.4).

Осталось проверить условие (а), т.е. проверить, что

$$\mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2(\xi^2+k^2)\tau}\bigl(-1+\widehat{\lambda}_{s_i}e^{-2(\xi^2+k^2)(t_{s_i}-\tau)}+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}e^{-2(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-\tau)}\bigr)\,d\mu_k(\xi) -$$
$$-\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2-\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2 \ge$$
$$\ge \mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda}) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau}\bigl(-1+\widehat{\lambda}_{s_i}e^{-2\xi^2(t_{s_i}-\tau)}+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}e^{-2\xi^2(t_{s_{i+1}}-\tau)}\bigr)\,d\mu_0(\xi) -$$
$$-\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2-\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2 \tag{3.8}$$

для всех наборов положительных мер $\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_{s_i}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}$ выбраны так (и в этом нетрудно убедиться), что выпуклая функция $\omega\mapsto -1+\widehat{\lambda}_{s_i}e^{-2\omega(t_{s_i}-\tau)}+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}e^{-2\omega(t_{s_{i+1}}-\tau)}$ на прямой обращается в нуль вместе со своей производной в точке $\omega_0=\xi_0^2$. Это означает, что данная функция всюду неотрицательна и тем самым $\mathcal{L}(\{d\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda}) \ge -\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2-\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2$. Так как $d\mu_0$ — мера Дирака в точке ξ_0, то интеграл в правой части (3.8) равен нулю и, значит, $\mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda}) = -\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2-\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2$. Этим доказано условие (а).

Итак, $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — решение задачи (3.4). Подставляя $\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в максимизируемый функционал, получаем значение этой задачи

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau}\, d\widehat{\mu}_0(\xi) = Ae^{-2\xi_0^2\tau} = \delta_{s_i}^{2(t_{s_{i+1}}-\tau)/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}\delta_{s_{i+1}}^{2(\tau-t_{s_i})/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})} = e^{-2p(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

С другой стороны, ясно, что величина $\mathcal{L}(\{d\widehat{\mu}_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\widehat{\lambda})$ равна $-\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau}\,d\widehat{\mu}_0(\xi)$ (в силу условия (в)), и поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau}\, d\widehat{\mu}_0(\xi) = e^{-2\theta(\tau)} = \widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2. \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь последовательность функций $\varphi_m(\cdot)\in L_2(M)$, $m\in\mathbb{N}$, преобразования Фурье которых имеют вид

$$F[\varphi_m](\xi,k) = \begin{cases} \sqrt{2\pi m}\,\delta_{s_i}^{t_{s_{i+1}}/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}\delta_{s_{i+1}}^{-t_{s_i}/(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}, & \xi\in[\xi_0,\xi_0+1/m],\ k=0,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Непосредственный подсчет показывает, что эти функции допустимы в задаче (3.3), а максимизируемый функционал на них сходится к $e^{-2\theta(\tau)}$ при $m\to\infty$.

Итак, значения задач (3.3) и (3.4) совпадают. Тогда из формулы (3.9) и оценки (3.1) получаем

$$E_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta}) \ge e^{-\theta(\tau)} = \sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2}. \tag{3.10}$$

Оценка сверху величины $E_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta})$ и оптимальные методы. Пусть $\widehat{\varphi}_a$ — метод вида (2.5). Оценим его погрешность, которая по определению есть значение следующей задачи:

$$\begin{gathered}\big\|u(\cdot,\tau,f)-(K_b*g_{s_i})(\cdot)-(K_a*g_{s_{i+1}})(\cdot)\big\|_{L_2(M)}\to\max,\\ \|u(\cdot,t_{s_j},f)-g_{s_j}(\cdot)\|_{L_2(M)}\le\delta_{s_j},\qquad z_{s_j}(\cdot)\in L_2(M),\qquad j=i,i+1,\\ f(\cdot)\in L_2(M).\end{gathered}\tag{3.11}$$

По теореме Планшереля квадрат максимизируемого функционала в этой задаче равен величине

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}\big|e^{-(\xi^2+k^2)\tau}F[f](\xi,k)-b(\xi,k)F[g_{s_i}](\xi,k)-a(\xi,k)F[g_{s_{i+1}}](\xi,k)\big|^2\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}\big|b(\xi,k)z_i(\xi,k)+a(\xi,k)z_{i+1}(\xi,k)\big|^2\,d\xi,\tag{3.12}$$

где $z_j(\xi,k)=e^{-(\xi^2+k^2)t_{s_j}}F[f](\xi,k)-F[g_{s_j}](\xi,k),\ j=i,i+1$.

Выражение под знаком интеграла в правой части (3.12) оценим с помощью неравенства Коши–Буняковского ($\widehat{\lambda}_{s_i}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}$ — определенные выше множители Лагранжа):

$$\left|\frac{b(\xi,k)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}}}\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}}\,z_i(\xi,k)+\frac{a(\xi,k)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}}}\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}}\,z_{i+1}(\xi,k)\right|^2\le$$
$$\le\left(\frac{|b(\xi,k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_i}}+\frac{|a(\xi,k)|^2}{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}}\right)\big(\widehat{\lambda}_{s_i}|z_i(\xi,k)|^2+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}|z_{i+1}(\xi,k)|^2\big).$$

Первый сомножитель справа не превосходит единицы для п.в. $\xi\in\mathbb{R}$ и всех $k\in\mathbb{Z}$. Действительно, если $(\xi,k)\in B(r_i)$, то это верно по условию (см. (2.4)). Если же $(\xi,k)\notin B(r_i)$, то снова по условию $a(\cdot)=0$ и этот сомножитель равен $c(\xi,k)=e^{-(\xi^2+k^2)(\tau-t_{s_i})}/\widehat{\lambda}_{s_i}$. Но то, что $(\xi,k)\notin B(r_i)$, равносильно согласно определению r_i неравенству $c(\xi,k)\le1$.

Итак, получаем, что выражение в правой части (3.12) не превосходит величины

$$\widehat{\lambda}_{s_i}\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}|z_i(\xi,k)|^2\,d\xi+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}|z_{i+1}(\xi,k)|^2\,d\xi.$$

Функция $z_j(\cdot)$ есть преобразование Фурье функции $u(\cdot,t_{s_j},f)-g_{s_j}(\cdot)$, норма которой в $L_2(M)$ не превосходит δ_j, $j=i,i+1$, согласно (3.11). Следовательно, по теореме Планшереля норма последнего выражения не превосходит $\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2$.

Таким образом, погрешность любого метода вида (2.5) не превосходит $\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}\delta_{s_i}^2+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}\delta_{s_{i+1}}^2}$. Вместе с оценкой (3.10) это означает, что все такие методы оптимальны и $E_\tau(\overline{g}(\cdot),\overline{\delta})=e^{-\theta(\tau)}$.

Нетрудно показать, выделяя полный квадрат, что неравенство (2.4) равносильно неравенству

$$\left|a(\xi,k)-\frac{\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}e^{-(\xi^2+k^2)(\tau-t_{s_i})}}{\widehat{\lambda}_{s_i}e^{(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}e^{-(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}}\right|\le$$
$$\le\frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_{s_i}\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}}\,e^{(\xi^2+k^2)t_{s_{i+1}}}}{\widehat{\lambda}_{s_i}e^{(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}+\widehat{\lambda}_{s_{i+1}}e^{-(\xi^2+k^2)(t_{s_{i+1}}-t_{s_i})}}\sqrt{h(\xi,k)},$$

где

$$h(\xi,k) = -e^{-2(\xi^2+k^2)\tau} + \widehat{\lambda}_{s_i} e^{-2(\xi^2+k^2)t_{s_i}} + \widehat{\lambda}_{s_{i+1}} e^{-2(\xi^2+k^2)t_{s_{i+1}}},$$

и эта функция неотрицательна, как было установлено выше.

Из полученного неравенства, очевидно, следует, что множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию теоремы, непусто, и тем самым теорема доказана для случая, когда $\tau \in (t_1, t_{s_k})$. Ситуации $0 < \tau < t_1$ и $\tau > t_{s_k}$ рассматриваются аналогично, но технически значительно проще, поэтому останавливаться на них здесь не будем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамова Е.В.* Восстановление решения задачи Дирихле по неточным граничным данным // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, №1. С. 3–13.
2. *Балова Е.А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Мат. заметки. 2007. Т. 82, №3. С. 323–334.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
4. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, №3. С. 51–64.
5. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. 2009. Т. 200, №5. С. 37–54.
6. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, №3. С. 76–79.
7. *Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M.* On optimal recovery of heat equation solutions // Approximation theory: A volume dedicated to B. Bojanov / Ed. by D.K. Dimitrov, G. Nikolov, R. Uluchev. Sofia: Marin Drinov Acad. Publ. House, 2004. P. 163–175.
8. *Магарил-Ильяев Г.Г., Сивкова Е.О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб. 2012. Т. 203, №4. С. 119–130.
9. *Magaril-Il'yaev G.G., Sivkova E.O.* Optimal recovery of semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Math. J. 2019. V. 10, N 4. P. 75–84.
10. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. 5-е изд. М.: УРСС, 2020.
11. *Melkman A.A., Micchelli C.A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. V. 16. P. 87–105.
12. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory: Proc. Int. Symp., Freudenstadt, 1976 / Ed. by C.A. Micchelli, T.J. Rivlin. New York: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
13. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1966.