Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени
Патриса Лумумбы»

На правах рукописи

Максимова Ирина Сергеевна

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Осипенко Константин Юрьевич

Москва — 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

В середине XX столетия начала активно развиваться математическая теория управления. Ее возникновение связано с необходимостью решать новые на то время задачи, прежде всего, задачи управления механическими объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями. Значительный вклад в создание математической теории оптимального управления и ее развитие внесли Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Р. Калман, Р. Беллман, Н.Н. Красовский, А.М. Летов, В.М. Тихомиров, Ф.П. Васильев, А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин, А.Д. Иоффе, А.Б. Куржанский, В.И. Благодатских, А.В. Дмитрук, М.Н. Зеликин, В.И. Коробов, А.В.Арутюнов и многие другие...

Принцип максимума Понтрягина послужил основой математической теории управляемых процессов. Дальнейшее развитие теории управления связано как с прикладными задачами (управление летательными объектами, космическими аппаратами, управление технологическими и экономическими процессами), так и с исследованием задач управления как чисто математических. Так возникли и сформировались такие направления в математической теории управления как управляемость, наблюдаемость, идентификация систем, теория оптимального управления, синтез управления для различных систем и другие.

Именно исследованию управляемости различных дифференциальных систем и посвящена часть настоящей работы.

Известный американский ученый Л.Янг (1937г.) в работе [1] пишет, что нет смысла говорить о необходимых условиях оптимальности без ответа на вопросы о существовании решения. Теория необходимых условий, по его словам, без теорем существования наивна [2]. В этом смысле и теорию существования оптимальных управлений можно назвать наивной без теории управляемости, т.к. в типичных теоремах существования оптимального управления предполагается существование хотя бы одного допустимого управления, порождающего траекторию, удовлетворяющую заданным краевым условиям, например, управления, переводящего траекторию из одного заданного положения в другое. Последняя задача и составляет сущность проблемы управляемости.

Впервые четкую постановку проблемы управляемости и ее решение для линейных стационарных систем (непрерывных и дискретных) дал Р. Калман в своем докладе на I конгрессе ИФАК (Москва, 1960) [3]. С тех пор критерий полной управляемости

$$rang\{B, AB, ..., A^{n-1}B\} = n$$

стал одним из наиболее известных результатов теории управляемости для линейных систем с постоянными матрицами A,B:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m.$$

Система называется полностью управляемой на некоторм отрезке времени, если найдутся допустимые управления, порождающие траектории, соединяющие две любые точки пространства. (переводящие траекторию из любого положения в пространстве в любое другое положение)

Для линейных нестационарных систем известен достаточный признак Н.Н. Красовского [4] при условии непрерывной дифференцируемости матриц коэффициентов вплоть до $(n-1)-$го порядка, где $n-$ порядок системы.

С.Ю. Култышев, Е.А. Тонков в работе [5] получили критерии вполне управляемости линейных нестационарных систем. Один из них связывает свойство полной управляемости исходной системы со свойством невырожденности двухточечной краевой задачи для гамильтоновой системы. Второй критерий выражен в терминах существования матрицы $V(t)$, удовлетворяющей некоторому дифференциальному неравенству.

Н.Н. Петров в работе [6] для систем вида $\dot{x} = f(x,u)$ получил достаточные условия управляемости для множества U произвольной природы, охватывающие случаи, когда $f(0,0) \neq 0$, а так же (в случае, когда начало координат пространсва R^r является внутренней точкой U и $f(0,0) = 0$) достаточные условия локальной управляемости для данных систем с "неуправляемым линейным приближением".

Ю.М. Семенов в работе [7] получил критерий полной управляемости линейных неавтономных систем по производным в нуле целых матриц $A(t)$ и $B(t)$. В случае когда матрицы $A(t)$ и $B(t)$ целые, из полученной теоремы вытекает критерий Красовского и ранговый критерий Калмана для случая, когда матрицы A и B - постоянные.

В статье [8] Ю.М. Семеновым рассмотрен геометрический подход к анализу управляемости линейных неавтономных систем $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ с коническими множествами ограничений управлений U и непрерывными матрицами $A(t)$ и $B(t)$. Получены критерии полной управляемости, первый из которых сводится к анализу расположения конусов $\Phi^{-1}(t)B(t)U$ в фазовом пространстве систем ($\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$), а второй основан на существовании подходящих управлений, переводящих точку нуль обратно в точку нуль. Причем, первый критерий констуктивен, но проверка его условий достаточно трудоемка.

Управляемый объект, описываемый дифференциальной системой, называется локально управляемым на множество, если для любой точки из некоторой окрестности этого множества существует допустимое управление, что соответсвующее ему решение системы перейдет из этой точки в некоторую точку самого множества.

Исследованием локальной управляемости нелинейных систем занимались Л. Маркус, Э. В. Ли, Н.Н. Красовский [9], [4]. Наиболее сильный результат в этой области принадлежит Калману [10] и состоит в том, что если линейное приближение системы полностью управляемо, то система локально управляема с помощью непрерывного управления.

В работе [11] А.В. Болтянский рассматривает два вида локальной управляемости, а именно, нормально локально управляемую систему и линейно локально управляемую систему. В работе рассмотрены достаточные условия локальной управляемости дифференциальных систем на основе понятия положительного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Е.Р. Аваков, Г.Г. Магарил - Ильяев и В.М. Тихомиров в работе [12] рассматривают задачу локальной управляемости динамической системы с фазовыми ограничениями. Для поставленной задачи получены достаточные условия локальной управляемости с применением принципа Лагранжа.

Ю.В. Мастерков в работах [13] и [14] изучал условия локальной нуль-управляемости нелинейных дифференциальных систем в критическом случае, т.е. в случае, когда система линейного приближения не является вполне управляемой. В рассмотренных работах получены достаточные условия локальной управляемости систем в критическом случае.

Проблемами локальной управляемости занимался также А.В. Арутюнов в своих работах [15], [16].

Задачами с переменной структурой в разное время занимались В.Г. Болтянский, В.Н. Розова, А.В. Дмитрук, Ю.М. Свирижев, В.Р. Барсегян и др.

Ю.М. Свирежев в своей работе [17] указывал о возможности использования систем с переменной размерностью при моделировании динамики биологических сообществ.

В работе А.Н.Кириллова [18] рассматривается метод посторения математической модели сложных систем с изменяющейся в процессе функционирования структурой.

Исследованию дифференциальных систем со сменой фазового пространста посвящена работа В.Г. Болтянского [19], в ней рассмотрена задача оптимального управления ступенчатыми системами с терминальным функционалом. Различные задачи оптимального управления разрывными системами рассмотрены Л. Т. Ащепковым в [20].

Задачи оптимального управления с ограничениями в промежуточных точках траектории рассмотрены в работах А.В. Дмитрука и А.М. Кагановича [21] и [22]. С помощью некоторого приема (размножения фазовых и управляющих переменных) эти задачи сводятся к стандартным задачам оптимального управления понтрягинского типа с ограничениями равенства и неравенства на концы траекторий. Этот прием помогает получать для данных задач необходимые условия оптимальности, обобщающие классический принцип максимума Понтрягина.

В работах В.Н. Розовой [23], [24] рассматривается задача оптимального управления ступенчатыми системами, в работах [15], [25], [26] исследуется локальная управляемость дифференциальных систем.

Качественно исследован вопрос управляемости и оптимизации линейных составных систем в работах В.Р. Барсегяна. В работе [27] В.Р. Барсегян привел конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами. Монография [28] посвящена проблемам управления составных линейных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. Получены необходимые и достаточные условия вполне управляемости и наблюдаемости составных линейных систем, которые в стационарном случае по завершенности сравнимы с условиями Калмана. Выявлены качественные свойства управляемости и наблюдаемости составных систем. Предложены конструктивные методы решения задач управления составных систем и систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями, с ограничениями на значения разных частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени. В работе [29] рассмотрена задача управляемости и оптимального управления одной системой линейных нагруженных дифференциальных уравнений, для которой, наряду с классическими краевыми условиями, заданы неразделенные многоточечные промежуточные условия. Возникновение таких задач связано с измерением фазовых состояний в некоторые моменты времени и непрерывной передачей информации с помощью обратной связи при наблюдении за динамическим процессом. В работе сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости для рассмотренной системы линейных дифференциальных уравнений с последействием и условия существования программного управления и движения. Работа [30] также посвящена задачам управления поэтапно меняющимися линейными системами нагруженных дифференциальных уравнений и задаче оптимального управления с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Построены аналитические виды движения и управляющего воздействия для поставленной задачи управления, а также предложен способ решения задачи оптимального управления. В [31], [32] сформулировано понятие управляемости линейных систем переменной структуры с помощью динамического регулятора. Показано, что при управлении системами переменной структуры с помощью динамического регулятора достаточно задать только начальное состояние регулятора, а не строить управление на всем интервале. Получены условия вполне управляемости составной и поэтапно меняющейся линейных нестационарных систем с помощью динамического регулятора. Показано, что поэтапно меняющаяся линейная стационарная система с помощью динамического регулятора вполне управляема тогда и только тогда, когда система вполне управляема и вполне наблюдаема.

Таким образом, проблема управляемости динамических систем является одной из наиболее важной в теории управления и далека от своего решения. Для нелинейных систем известны результаты по локальной управляемости. Общих результатов, разрешающих проблему как в линейном случае, нет и, скорее всего, их невозможно получить. Надо учитывать качественные свойства динамических систем, классификация которых невозможна.

Для задач со сменой фазового пространства, которые являются подклассом гибридных систем, даже в линейном стационарном случае результатов, сравнимых по завершенности с критерием Калмана, нет. Это связано со сложность исследуемого объекта [18].

В настоящей работе рассматривается задача управляемости для динамических систем со сменой фазового пространства, т.е. исследуется возможность перевода объекта из заданного множества одного фазового пространства в заданное множество другого фазового пространства через некоторую заданную "гиперповерхность перехода". При этом данные фазовые пространства могут иметь разные размерности. Возможен переход как из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности, так и наоборот. Размерности пространств зависят от практического смысла исследуемой задачи.

Первоначальным источником моделей гибридных систем с переключением на многообразиях послужили многостадийные процессы космического полета [33]. Такие модели отличались фиксированными последовательностями переключений. При этом при достижении траекторией некоторого многообразия происходит изменение размерности пространства, вектора управления или изменение уравнений движения.

Уменьшение или увеличение размерности фазовых пространств в задачах с переменной размерностью тесно связано с понятиями агрегирования и декомпозиции.

Одной из особенностью агрегирования является уменьшение размерности - объединение части в нечто целое. Наиболее часто встречающаяся ситуация, приводящая к необходимости использования агрегирования, является работа с многочисленной совокупностью данных, которые плохо обозримы и с которыми трудно "работать". Так, например, в работе [34] применяется способ последовательного агрегирования переменных для приведения нелинейной системы к специальному виду, с уменьшением размерности.

Методы декомпозиции же, наоборот, приводят к увеличению размерности. Декомпозиция позволяет осуществить последовательное разбиение системы на подсистемы, которые в свою очередь, могут быть разбиты на составляющие их части. Разбиение системы на подсистемы в общем случае может быть выполнено неоднозначно. Состав используемых признаков декомпозиции и порядок их применения зависят от особенностей конкретной задачи. В результате декомпозиция позволяет структурировать крупные и сложные объекты на подсистемы, обладающие требуемыми свойствами. Методы декомпозиции часто используют в линейном программировании.

В последнее время растет интерес к задачам моделирования и управления с несколькими динамическими системами с последовательными во времени режимами работы. Это одно из активно развивающихся направлений современной математической теории управления. Такое бурное развитие данного типа задач связано с расширением области их применения.

К задачам с переменной размерностью сводятся, например:

– процессы инвестирования динамических экономических систем [35],
– описание крупных промышленных и производственных комплексов [36],
– управление сложными техническими системами, в частности, электроэнергетическими системами [37], [38],
– управление коммуникационными и информационными системами, транспортными и производственными потоками [39], [40],
– моделирование многостадийных технологических процессов [36], [41], [42],
– задачи оптимизации траекторий выведения космического аппарата с дополнительным топливным баком и ступенчатых космических аппаратов с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геостационарную орбиту [43].

Примерами экономических систем, которые состоят из изменяющегося количества подсистем, являются, например, крупные производственные корпорации, фирмы, в состав которых входят предприятия, выпускающие некоторую продукцию [18]. Также подобные задачи могут использоваться для обоснования различных схем взаимодействия между уровнями в экономических системах при решении задач планирования и оперативного управления [35].

Задачи со сменой фазового пространства имеют также и физический смысл и возникают, например, когда управляемый аппарат запускается с другого управляемого аппарата, космического, наземного, подводного, надводного [44].

И это далеко не полный список областей применимости подобных задач управляемости. При таком довольно широком практическом применении задач со сменой фазовых пространств, остается актуальным исследование теоретических основ подобного рода задач.

С понятием управляемости дифференциальных систем тесно связано понятие наблюдаемости, которое также является одним из фундаментальных понятий теории управления и наблюдения. Задачи наблюдения динамических систем имеют важные теоретическое и практическое значения. Например, для реализации управления по принципу обратной связи необходимо знать фазовое состояние системы в каждый момент времени. Поскольку не все фазовые координаты системы доступны измерению, необходимо рассмотреть вопрос о возможности полного восстановления фазовых координат системы по результатам неполного наблюдения (измерения). Наблюдаемость является свойством системы, показывающим, можно ли по выходу полностью восстановить информацию о состояниях системы.

В настоящей работе также рассматривается задача восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по информации, заданной со случайной ошибкой.

Общая постановка задачи восстановления заключается в определении значений заданного функционала или оператора на некоторых классах функций по неполной информации о них. О функциях, по которым мы восстанавливаем значения оператора, нам известна информация двух типов. Первый тип ”глобальный”, характеризует класс функций, которые только и могут встретиться; другой – ”локальный” (индивидуальный), связанный с характеризацией отдельной функции. Классы обычно связывают со свойствами гладкости или аналитичности входящих в них функций. Локальная или индивидуальная информация обычно состоит в том, что нам оказываются доступными некоторые характеристики функции (например, ее значения в отдельных точках, моменты, коэффициенты Фурье или Тейлора, преобразование Фурье и т.п.). Эта информация может задаваться с детерминированной ошибкой или со случайной [45].

К настоящему времени имеется значительное число работ, в которых для различных задач восстановления найдены оптимальные методы. Задачи с детерминированнными ошибками рассматривались, например, в работах [46] - [55].

Задачи со случайными ошибками изучались в работах [56] - [62]. В работе [57] оценка методов восстановления берется по линейным функционалам, в работе [58] получена оценка для нелинейного метода восстановления через оценки линейных методов.

Задача оценивания погрешности метода восстановления по случайной величине, имеющей нормальное распределение рассмотрена в работе [59]. В ней получено неравентсво для оценки минимаксного нелинейного риска.

Задача восстановления решения системы линейных однородных уравнений рассматривалась в [63], но в случае детерминированной ошибки.

Цели и задачи работы

В диссертационной работе ставились следующие цели:

– проведение анализа задач управляемости для дифференциальных систем со сменой фазового пространства при различных вариантах правых частей систем дифференциальных уравнений;
– получение условий управляемости для задач со сменой фазовых пространств как в нелинейном, так и в линейном случае;
– поиск новых подходов к исследованию управляемости для задач с переменной структурой;
– решение задачи оптимального восстановления решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой.

Научная новизна

Научная новизна работы обусловлена следующими основными результатами диссертационного исследования:

– получен ряд условий управляемости для систем с переменной структурой, рассмотрены различные классы дифференциальных систем в различной комбинации;
– получены достаточные условия управляемости для нелинейных дифференциальных систем со сменой фазовых пространств в случае, когда правые части дифференциальных систем являются вогнутыми отображениями;
– рассмотрен вопрос применимости локальной управляемости нелинейных дифференциальных систем для задач с переменной структурой;
– получены оптимальный метод восстановления линейного оператора по исходной информации, заданной со случайной ошибкой, и оптимальный метод восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным, известным со случайной ошибкой.

Теоретическая и практическая значимость работы

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в теории управляемости при исследовании различных динамических систем. Также полученные результаты имеют довольно широкое практическое применение в различных задачах экономики, эконометрики и в задачах с физическим приложением. Задачи восстановления данных по неточной начальной информации применяются, например, в геофизике и астрономии.

Методология и методы исследования

В работе используются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, линейной алгебры, управляемости, оптимального управления, выпуклого анализа, многозначного анализа, функционального анализа и теории приближения функций.

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказано условие управляемости нелинейных дифференциальных систем треугольного вида в задаче со сменой фазового пространства. В явном виде получены уравнения, описывающие траектории, с помощью которых осуществляется переход из заданного множества одного пространства в заданное множество другого пространства.
2. Доказано достаточное условие управляемости системы со сменой фазового пространства в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями.
3. Доказано достаточное условие управляемости задачи со сменой фазового пространства в случае, когда нелинейная система в первом пространстве линеаризуется при некоторой замене переменных, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль-управляемой.
4. Доказаны теоремы об оптимальном восстановлении линейного оператора и решения линейной системы дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений восстановлено при различных вариантах задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$. В каждой задаче рассматривается случай различных собственных значений матрицы A и случай кратных собственных значений.

Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-ой производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 103 страницы, включая 0 рисунков. Список литературы содержит 83 наименования.

Во введении приводится краткий обзор исследований по теории управляемости и теории восстановления, дано обоснование теоретической и практической ценности полученных результатов. Описаны цели диссертационного исследования, общая методика исследования и новизна полученных результатов.

В первой главе рассматривается задача о переводе управляемого объекта, описываемого двумя нелинейными дифференциальными системами в разных фазовых пространствах и на последовательных промежутках времени, из заданного множества одного пространства на заданное множество другого пространства через заданную "гиперплоскость перехода". Исследуется управляемость объекта для нелинейных дифференциальных систем треугольного вида, которые с помощью некоторой замены переменных сводятся к линейным системам. Рассмотрен пример, иллюстрирующий данный подход к исследованию управляемости в поставленной задаче.

В двух фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,...,x_n)$ и $y = (y_1,...,y_m)$ движение управляемого объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,...,x_{i+1}), \quad i = 1,...,n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,...,x_n; u). \end{cases} \tag{1}$$

$x \in X, \quad t \in [0,\tau]$.

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dt} = g_k(y_1,...,y_{k+1}), \quad k = 1,...,m-1, \\ \frac{dy_m}{dt} = g_m(y_1,...,y_m; v). \end{cases} \tag{2}$$

$y \in Y, \quad t \in [\tau, T]$.

Моменты времени τ и T заданы. В пространстве X задано начальное множество M_0 и гиперплоскость перехода $\Gamma = (x,c)$. Стыковка траекторий осуществляется с помощью заданного отображения $q : X \to Y$, $y(\tau) = q(x(\tau))$. Так же посредством этого отображения реализуется переход из одного пространства в другое. В пространстве Y задано конечное множество M_1.

Управляемый объект движется по следующей схеме: на отрезке времени $[0,\tau]$ объект движется из начального множества M_0 по решениям системы (1), в момент времени τ объект попадает на Γ и происходит переход в пространство Y под действием отображения $q : X \to Y$, $q(x(\tau)) = y(\tau)$. Полученная точка $y(\tau)$ является начальной для движения объекта в пространстве Y. Дальнейшее движение на отрезке времени $[\tau, T]$ объект осуществляет из точки $y(\tau)$ на множество M_1 по решениям системы (2). Причем $y(\tau) \notin M_1$(в противном случае задача решена).

Задача: заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами(1) и (2), является управляемым на $[0, T]$ из множества M_0 пространства X на множество M_1 пространства Y.

Определение 0.0.1. [64] Объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из M_0 в M_1, если на отрезках $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$ существуют допустимые управления u и v, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Условия управляемости объкта, описанного системами (1) и (2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 0.0.1. *Пусть в системах (1) и (2) функции* $f_i(x_1, \cdots ,x_{i+1}), i = 1,...,n$ *и* $g_k(y_1, \cdots ,y_{k+1}), k = 1,...,m,$ *имеют непрерывные частные производные до* $(n - i + 1)$*-го и* $(m - k + 1)$*-го порядков включительно и пусть при всех* $x_1, \cdots , x_{n+1}$ *и при всех* $y_1, \cdots , y_{m+1}$ *выполнены неравенства*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a > 0,$$

$$\left|\frac{\partial g_k}{\partial y_{k+1}}\right| \geqslant b > 0,$$

где a *и* b *- постоянные, не зависящие от* $x_1, \cdots , x_{n+1}$ *и* $y_1, \cdots , y_{m+1}$ *соответственно. И пусть выполнены условия стыковки траекторий* $y(\tau) = q(x(\tau))$. *Тогда объект, описанный системами (1) и (2) является управляемым из начального множества* M_0 *пространства* X *на конечное множество* M_1 *пространства* Y.

Во второй главе управляемость дифференциальных систем в задаче со сменой фазового пространства исследуется с помощью аппарата теории выпуклого анализа и многозначных отображений. Получены достаточные условия управляемости поставленной задачи для нелинейных дифференциальных систем, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями. В случае, когда правые части дифференциальных систем линейны, с помощью аппарата опорных функций получено достаточное условие управляемости в поставленной задаче, позволяющее оценить время перехода из заданного множества одного пространства на заданное множество другого пространства через некоторую гиперповерхность перехода. Приведен пример, иллюстрирующий данный подход к исследованию.

Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_m)$. Обозначим $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(\mathbb{R}^m)$ - совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно. Пусть заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0,\tau]; \tag{3}$$

$$\dot{y}(t) = g(t,y(t),v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \tag{4}$$

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in L_\infty([0,\tau], R^n)$, $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], R^m)$, для которых $u(t) \in U$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ и $v(t) \in V$ при п.в. $t \in [\tau, T]$. Решениями систем (3) и (4) при $t \in [0,\tau]$ и $t \in [\tau, T]$ называются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$ системам (3) и (4) соответственно. Пусть функции $f(t,x,u)$, $g(t,y,v)$ таковы, решение задачи Коши для систем (3) и (4) существует и единственно.

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ. Пусть τ - наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. Когда объект, движущийся по закону (3), достигает гиперповерхности Γ, происходит переход в пространство Y, заданный линейным отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (4). Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Подобная схема движения объекта изучена например в [19].

Задача: заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (3) и (4), будет управляемым из M_0 в M_1.

Определение 0.0.2. Объект, описываемый системами (3) и (4), называется управляемым из M_0 в M_1, если существуют такие допустимые управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Для системы (3) в фазовом пространстве $X = \mathbb{R}^n$ в точке x рассмотрим множество $f(t,x,U)$, состоящее из всех векторов $f(t,x,u)$, где u принадлежит множеству U. Если $x(t)$ - некоторая траектория системы (3), соответствующая допустимому управлению $u(t)$, то при почти всех $t \in [0,\tau]$ выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in f(t,x(t),U). \tag{5}$$

Это приводит нас к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in f(t,x,U). \tag{6}$$

Теперь, при сделанных замечаниях, вместо нелинейной системы (3) будем рассматривать дифференциальное включение (6). Обозначим $f(t,x,U)$ через $F(t,x)$, тогда в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t,x), \;\; t \in [0,\tau], \tag{7}$$

где $F(t,x)$ - многозначное отображение. Аналогично в пространстве $Y = \mathbb{R}^m$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{y} \in G(t,y), \;\; t \in [\tau,T]. \tag{8}$$

Движение объекта из пространства X в пространство Y осуществляется по схеме, описанной выше.

Определение 0.0.3. [79] *Многозначное отображение $F(t,x)$ называется вогнутым по x на множестве M, если для любых точек $x_1,x_2 \in M$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие*

$$\lambda F(t,x_1) + (1-\lambda)F(t,x_2) \subset F(t,\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Заметим, что из этого условия следует (см., например, [79]) выпуклость множества $F(t,x)$ при каждом $x \in M$. Множество достижимости $K(t)$ для каждого $t \in [0,\tau]$ состоит из всех точек $x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $x(t)$ - решение включения (7) с начальным условием $x(0) \in M_0$.

Теорема 0.0.2. *Пусть $F(t,x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0,\tau]$ и пусть отображение $G(t,y)$ вогнуто по y на множестве достижимости $K_3(T)$ при всех $t \in [\tau, T]$ и $K_3(T)$ компактно. $K_3(T)$ – множество достижимости системы (8) из $K_2(\tau)$ в момент времени T, где $K_2(\tau) = q(K(\tau) \cap \Gamma)$. Тогда для управляемости объекта, описываемого системами (3) и (4), на отрезке времени $[0,T]$ достаточно, чтобы было выполнено следующее соотношение $c(K_3(T),\psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$.*

Рассмотрим задачу для случая линейных систем. Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_m)$. Заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0,\tau]; \tag{9}$$

$$\dot{y} = By + v, \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau,T]. \tag{10}$$

Класс допустимых управлений — это множества функций

$$\{u(\cdot) \in L_\infty([0,\tau],\mathbb{R}^n) \mid u(t) \in U, \, t \in [0,\tau]\},$$

$$\{v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T],\mathbb{R}^m) \mid v(t) \in V, \, t \in [\tau,T]\}.$$

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ. Число τ — наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. В пространстве X также задано отображение $q : X \to Y$, с помощью которого осуществляется переход из одного фазового пространства в другое. Движение объекта из одного пространства в другое происходит также как и в случае нелинейных систем. Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(R^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$).

Задача: заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (9) и (10), будет управляемым из M_0 в M_1.

Множество достижимости $K(\tau)$ для системы (9) — это множество концов траекторий системы (9) с начальным множеством M_0, соответсвующих всевозможным допустимым управлениям $u(\cdot)$, и рассматриваемое в момент времени τ.

Определим функцию управляемости [82] $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ соотношением

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int\limits_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*}\psi)ds. \qquad (11)$$

Здесь $K_2(\tau) = q(K(\tau) \cap \Gamma)$.

Теорема 0.0.3. *Пусть заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ, линейное отображение $q : X \to Y$, конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Для управляемости объекта, описываемого системами (9) и (10) на отрезке $[0,T]$ достаточно, чтобы функция управляемости*

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int\limits_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*}\psi)ds$$

была неотрицательна для любых $\psi \in S$, здесь $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$, а S – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в 0.

В третьей главе исследуется возможность примения локальной управляемости в задачах со сменой фазового пространства. Для задачи, в которой нелинейная система в первом пространстве линеаризуется при некоторой замене переменных, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль - управляемой, получены достаточные условия управляемости из начального множества одного пространства в конечное множество другого пространства.

В фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ движение объекта описывается нелинейными управляемыми системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; v), \end{cases} \qquad (12)$$

где $v \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\tau]$, $x(t) \in X$.

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \tag{13}$$

где $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $t \in [\tau, T]$, $y(t) \in Y$, $B(t)$ - матрица размера $m \times r$ специального вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau,T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение.

Моменты времени τ и T заданы. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}$, $0 \in int\Omega$. Здесь $int\Omega-$ внутренность множества Ω.

Функции $f(y)$, $g_i(x_1, \ldots, x_i), i = \overline{1,n}$ таковы, что решение задачи Коши для систем (12) и (13) существует и единственно.

Будем использовать схему движения управляемого объекта с переходом системы через ноль. Опишем эту схему подробно.

В пространстве X задано некоторое начальное множество M_0, в пространстве Y задано конечное множество M_1. На отрезке времени $[0,\tau]$ объект движется по закону (12) из начального множества M_0, в момент времени τ он попадает в точку ноль. Далее происходит переход в пространство Y, заданный некоторым отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (13). Причем $q(x(\tau)) \notin M_1$ (если $q(x(\tau)) \in M_1$, то задача решена).

Задача: найти условия, при которых объект, описываемый системами (12) и (13), будет управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y.

Условия управляемости данного объекта можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 0.0.4. *Пусть функции $g_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $\quad i = 1, \ldots, n$, имеют непрерывные частные производные до $(n - i + 1)$ - го порядка включительно и при всех $x_1, \ldots, x_{n+1}$ выполнено неравенство*

$$|\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}}| \geqslant b > 0, \quad i = 1, \ldots, n \qquad x_1, \ldots, x_{n+1},$$

где b - постоянная, не зависящая от $x_1,\dots,x_{n+1}$. Пусть выполнены все предположения на $f(y)$, $B(t)$ и $u(t)$. Также на отрезке $[\tau,T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен m, где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t),...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Тогда объект, описываемый системами (12) и (13), является управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0,T]$.

Четвертая глава посвящена задачам восстановления значений линейного оператора на некотором классе по исходной информации, заданной со случайной ошибкой. Полученная общая теорема о восстановлении применена к случаю восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой.

Пусть X — линейное пространство, Z — линейное нормированное пространство и $T\colon X \to Z$ — линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора T на некотором множестве (классе) $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I\colon X \to \mathbb{R}^n$, заданным со случайной ошибкой. Более точно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{\, y = (y_1,\dots,y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix,\, \mathbb{D}(y_j) \leqslant \delta^2,\, j = 1,\dots,n \,\}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства Z, принимаемый за приближение к значению Tx. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$ называется величина

$$e(T,W,I,\delta,\varphi) = \left(\sup_{x\in W,\ y\in Y_\delta(x)} \mathbb{M}\left(\|Tx - \varphi(y)\|^2_Z\right) \right)^{1/2}$$

(рассматриваются только те методы, для которых эта величина определена). Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T,W,I,\delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n\to Z} e(T,W,I,\delta,\varphi) \tag{14}$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым оптимальным.

Положим

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \nu_j |x_j|^2 \leqslant 1 \right\},$$

где $\nu_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Определим линейные операторы $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$Tx = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n), \quad Ix = (x_1, \dots, x_n),$$

$|\mu_j| > 0$, $j = 1, \dots, n$.

Введем обозначения

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$. Нетрудно убедиться, что $0 = \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n$.

Теорема 0.0.5. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некотором $1 \leqslant s \leqslant n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - c_1)}{\gamma_1} \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{15}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{\gamma_k (1 - c_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k,$$

где $\{e_k\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, является оптимальным.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{16}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ и $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n$$

— собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\mu_j, j = 1,\ldots,n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.9) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0. Требуется восстановить решение в момент τ, $\tau > 0$.

Положим для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \nu_j x_j^2 \leqslant 1 \right\}, \quad Tx = (e^{\mu_1 \tau} x_1, \ldots, e^{\mu_n \tau} x_n), \quad Ix = (x_1, \ldots, x_n).$$

Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Для решения поставленной задачи восстановления применим теорему 0.0.5.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{-\lambda_j (T_1 - \tau)}}, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$.

Теорема 0.0.6. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \leqslant s \leqslant n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^s e^{-2\lambda_k (T_1 - \tau)} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1} (1 - c_1) \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{17}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left((1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1}(1 - c_1) \right) e^{-\lambda_k (T_1 - \tau)} y_k e_k,$$

является оптимальным.

В четвертой главе рассмотрены различные варианты задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$. В каждой задаче рассматривается случай различных собственных значений матрицы A и случай кратных собственных значений.

Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-ой производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

В поставленных задачах рассматриваются произвольные распределения случайного вектора с фиксированным математическим ожиданием и фиксированной оценкой для дисперсии. Как и в задачах с детерминированной ошибкой здесь обнаруживаются такие эффекты, как линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерений информацию.

В заключении перечислены основные оригинальные результаты диссертационного исследования.

Степень достоверности полученных в диссертации результатов обеспечивается строгостью доказательств, имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Апробация результатов

Результаты, представленные в диссертационной работе, были доложены на следующих научных семинарах:

– научный семинар ”Кинетические и нелинейные уравнения математической физики” под руководством С.Б. Куксина, А.Л. Пятницкого, А. Л. Скубачевского, Математический институт имени академика С.М. Никольского, РУДН;
– научный семинар кафедры общих проблем управления МГУ имени М.В. Ломоносова ”Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения” под руководством М.И. Зеликина, В.Ю. Протасова, В.М. Тихомирова, А.В. Фурсикова;
– аспирантско-студенческий семинар ”Геометрическая теория оптимального управления” под руководством Л.В. Локуциевского, Математический институт им. В.А. Стеклова;
– семинар С.М. Никольского по теории функций многих действительных переменных и приложениям к задачам математической физики под руководством О.В. Бесова, Математический институт им. В.А. Стеклова;
– Научный семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством А.Л.Скубачевского, Математический институт имени академика С.М. Никольского, РУДН.
– Совместный семинар ЦКП ССКЦ и НГУ “Высокопроизводительные вычисления” под руководством Куликова И.М.

Также результаты, представленные в диссертационной работе, были доложены на следующих конференциях:

– Международная конференция КРОМШ - 2021 "XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа - симпозиум по спектральным и эволюционным задачам Симферополь, 17 - 26 сентября 2021 г.
– International conference "Data Analysis, Optimization and their Applications Moscow, MIPT, January 30 —January 31, 2023.
– Шестнадцатая международная конференция "Управление развитием крупномасштабных систем MLSD’2023, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 26-28 сентября 2023.
– XIX Всероссийское совещание по проблемам управления - ВСПУ-2024, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 17-20 июня 2024.
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2024, Суздаль, 28 июня – 3 июля 2024.

– Школа - конференция "Неголономные дни в Переславле", 26–30 августа 2024, Переславль - Залесский.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих научных работах:

1. Максимова И.С. Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства, Таврический вестник информатики и математики, 2021,—№2(51),—С. 53–64.
2. Maximova, I. The Problem of Controllability with Phase Space Change. Advances in Systems Science and Applications, 2023,— 23(1),—P.61–68. https://doi.org/10.25728/assa.2023.23.01.1364
3. Maximova Irina, Local Controllability in the Problem with Variable structure, 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Moscow, 2023,—P. 1–3, doi:10.1109/MLSD58227.2023.10303947, ISBN 979-8-3503-3790-7.
4. I.S. Maximova, Controllability of Triangular Systems with Phase Space Change. Data Analysis and Optimization. In Honor of Boris Mirkin's 80th Birthday, Springer Cham, 2023,—1,— XXXV,—P. 225–236. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31654-8
5. Максимова И.С., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой, Математический сборник, 2025,—Т.216,—№4,—С. 67–89.

а также в следующих тезисах конференций.

1. Максимова И.С. Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства, Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2021 "XXXII Крымская Осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", 2021, С.51, ISBN 978-5-6046943-4-3.
2. Максимова И.С. Задача управляемости треугольными системами со сменой фазового пространства, Управление развитием крупномасштабных систем. MLSD'2023 Труды шестнадцатой международной конференции, ИПУ РАН, 2023,—С. 618-622, ISBN 978-5-91450-270-3.
3. Максимова И.С. Выпуклость множеств достижимости в исследовании управляемости системы с переменной структурой, Сборник тудов XIV

Всероссийского совещания по проблемам управления, Москва, ИПУ РАН, 2024,—С.314–318, ISBN 978-5-91450-276-5.

4. Максимова И.С., Осипенко К.Ю., Оптимальное восстановление решений системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой, Сборник тезисов докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 2024,—С. 208–209, ISBN 978-5-9984-1747-4.

Глава 1. Управляемость дифференциальных систем в задаче со сменой фазовых пространств

Глава посвящена исследованию условий управляемости задачи со сменой фазового пространства в случае, когда правые части дифференциальных систем представляют собой так называемые системы треугольного вида. Результаты, полученные в данной главе, опубликованы соискателем в следующих научных публикациях:

– I.S. Maximova, Controllability of Triangular Systems with Phase Space Change. Data Analysis and Optimization. In Honor of Boris Mirkin's 80th Birthday, Springer Cham, 2023,—1,— XXXV,—P. 225–236. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31654-8
– Максимова И.С. Задача управляемости треугольными системами со сменой фазового пространства, Управление развитием крупномасштабных систем. MLSD'2023 Труды шестнадцатой международной конференции, ИПУ РАН,2023,—С. 618-622.

1.1 Постановка задачи

Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x(t),u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0,\tau], \quad x \in X. \tag{1.1}$$

$$\dot{y} = g(y(t),v(t)), \quad v(t) \in V, \quad t \in [\tau, T], \quad y \in Y. \tag{1.2}$$

Класс допустимых управлений состоит из всех функций
$u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r \mid u(\cdot) \in L_\infty[0,\tau]; u(t) \in U_1 \subset \mathbb{R}^r, t \in [0,\tau]\}$, $r \leqslant n$,
$v(\cdot) \in V = \{v(t) \in \mathbb{R}^q \mid v(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; v(t) \in V_1 \subset \mathbb{R}^q, t \in [\tau, T]\}$, $q \leqslant m$.

Функции $f(x(t),u(t))$, $g(y(t),v(t))$ таковы, что для систем (1.1) и (1.2) выполнена теорема существования и единственности решения задачи Коши при заданных допустимых функциях $u(t)$ и $v(t)$ соответственно. Решениями систем (1.1) и (1.2) при $t \in [0,\tau]$ и $t \in [\tau, T]$ являются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$ системам (1.1) и (1.2) соответственно. В X заданы начальное множество $M_0 \subset R^n$ и не пересекающаяся с ним "гиперплоскость перехода" Γ, с нормалью γ.

Когда объект, движущийся по закону (1.1), достигает гиперплоскости Γ, происходит переход в пространство Y, заданный некоторым линейным отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (1.2). Наконец, в Y задано конечное множество M_1 (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$).

Пусть τ - момент попадания траектории системы (1.1) на гиперплоскость перехода Γ. Момент времени τ может быть как задан заранее, так и не задан.

Задача заключается в том, чтобы перевести объект, описываемый системами (1.1) и (1.2), из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y через гиперплоскость Γ. Данную задачу назовем (см. [65]) **задачей управляемости со сменой фазового пространства или задачей с переменной структурой**.

Для осуществления данного перехода, в случае заданного момента времени τ, на отрезках $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$ должны найтись такие допустимые управления $u(t)$ и $v(t)$, чтобы соответсвующие им решения систем (1.1) и (1.2) удовлетворяли граничным условиям:

$$x(0) \in M_0, x(\tau) \in \Gamma, y(\tau) = q(x(\tau)) \in \Gamma, y(T) \in M_1.$$

В случае, если момент времени τ не задан, для осуществления данного перехода должны найтись момент времени $\tau \in [0,T]$ и такие допустимые управления $u(t)$ и $v(t)$ на отрезках $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$, чтобы соответсвующие им решения систем (1.1) и (1.2) удовлетворяли граничным условиям:

$$x(0) \in M_0, x(\tau) \in \Gamma, y(\tau) = q(x(\tau)) \in \Gamma, y(T) \in M_1.$$

Итак, данная задача распадается на две подзадачи:
задачу I : переход из множества M_0 на гиперплоскость Γ в пространстве X и
задачу II: переход из $y(\tau)$ на множество M_1 в пространстве Y.
Рассмотрим отдельно каждую из получившихся задач.

1.2 Задача I: попадание из начального множества M_0 на гиперплоскость Γ в пространстве X

Рассмотрим условия перехода из множества M_0 на гиперплоскость Γ в пространстве X.
Решение системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in M_0$ имеет вид

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^{\tau} f(x(t),u(t)dt. \tag{1.3}$$

Пусть гиперплоскость перехода Γ задается уравнением $(a,x) = c$. Тогда для того, чтобы в момент времени τ траектория $x(t)$ попала на заданную гиперплоскость необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$(a,x(\tau)) = c,$$

$$(a,x_0) + \int\limits_0^{\tau} (a,f(x(t),u(t))dt = c,$$

$$\int\limits_0^{\tau} (a,f(x(t),u(t)))dt = c - (a,x_0) \tag{1.4}$$

Итак, если существуют такое $u(t)$ и момент времени τ и выполнено условия (1.4), то траектория $x(t)$ попадет на гиперплоскость Γ в момент времени τ.

Рассмотрим поведение траектории в момент времени τ. Траектория $x(t)$ может иметь общие точки с гиперплоскость Γ в двух случаях: в случае, когда траектория пересекает гиперплоскость и в случае, когда траектория касается гиперплоскости.

При этом в задаче I следует избежать касания траектории и гиперплоскости Γ (более подробно эту ситуацию рассмотрим ниже). Множество задач, в которых при попадании на гиперплоскость траектория ее не касается, достаточно широко. Рассмотрим далее в качестве задачи I задачу некоторого оптимального перехода из точки x_0 на гиперплоскость Γ. С этой целью введем в рассмотрение функционал

$$J = \int\limits_0^{\tau} f_0(x(t),u(t))dt. \tag{1.5}$$

Функция $f_0(x(t),u(t))$ удовлетворяет тем же условиям, что и функции $f(x(t),u(t))$, $g(y(t),v(t))$.

Рассмотрим задачу оптимального управления со следующими краевыми условиями в пространстве X:

$$\dot{x} = f(x(t),u(t)), \quad u(t) \in U, \quad t \in [0,\tau], \quad x \in X. \tag{1.6}$$

$$J = \int_0^\tau f_0(x(t),u(t))dt. \tag{1.7}$$

Заданы начальная точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и гиперплоскость Γ с нормалью γ: $x_0 \notin \Gamma$.

Требуется среди всех допустимых управлений $u(t), t \in [0, \tau]$, переводящих объект, описываемый системой (1.6) из начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на гиперплоскость Γ, найти такое, которое придает функционалу (1.7) наименьшее возможное значение.

Необходимое условие решения поставленной задачи дает принцип максимума Понтрягина [66]:

Пусть $u(t), t \in [0, \tau]$ - допустимое управление, переводящее объект из положения x_0 в положение $x_1 \in \Gamma$, а $x(t)$ - соответствующая ему траектория. Для оптимальности (в смысле минимума функционала (1.7)) управления $u(t)$ и траектории $x(t)$, $t \in [0, \tau]$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, соответсвующей функциям $u(t)$ и $x(t)$ и являющейся решением системы:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(\psi, x(t),u(t))}{\partial x_i}, i = 0,1, \ldots ,n, \tag{1.8}$$

(здесь $H(\psi(t), x(t),u(t) = \psi_0(t)f_0(x(t),u(t)) + (\psi(t),f(x(t),u(t))$, что

1) при любом $t \in [0, \tau]$ функция $H(\psi(t), x(t),u(t))$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(\psi(t), x(t),u(t)) = M(\psi(t),x(t)),$$

2)в конечный момент времени τ выполнены соотношения

$$\psi_0(\tau) \leqslant 0, \ M(\psi(\tau),x(\tau)) = H(\psi(\tau), x(\tau),u(\tau)) = 0,$$

3) выполнено условие трансверсальности в правом конце

$$\psi(\tau) = \gamma$$

(вектор $\psi(\tau)$ ортогонален гиперплоскости Γ).

Рассмотрим более подробно поведение оптимальной траектории задачи I в правом конце в момент времени τ, где τ - момент попадания на гиперплоскость Γ. Наша задача - исключить касание в этой точке, траектория должна "протыкать"данную гиперплоскость.

Функция H в момент времени τ имеет вид

$$H(\psi(\tau),x(\tau),u(\tau)) = \psi_0(\tau)f_0(x(\tau),u(\tau)) + (\psi(\tau),f(x(\tau),u(\tau)) = 0.$$

В силу системы (1.1) и условия трансверсальности в правом конце, имеем

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau),u(\tau)),\ \psi(\tau) = \gamma.$$

Тогда

$$H(\psi(\tau),x(\tau),u(\tau)) = \psi_0(\tau)f_0(x(\tau),u(\tau)) + (\gamma,\dot{x}(\tau)) = 0.$$

Если в момент времени τ трактория касается гиперплоскости Γ, то $(\gamma,\dot{x}(\tau)) = 0$, тогда получим

$$\psi_0(\tau)f_0(x(\tau),u(\tau)) = 0.$$

Откуда, если $f_0(x(\tau),u(\tau)) \neq 0$, $\psi_0(\tau) = 0$, и задача оказывается анормальной [67].

Итак, если задача не является анормальной, то в момент попадания на гиперплоскоть, траектория $x(t)$ не касается гиперплоскости Γ. Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что траектория при попадании на гиперплоскость перехода ее не касается.

1.3 Задача II: управляемость в пространстве Y

Пусть, решая задачу I, мы нашли момент времени τ (если он не задан) и единственное управление $u^*(\tau)$, соответствующую ему траекторию $x^*(t)$, которые переводят систему (1.1) из положения $x_0 \in M_0 \subset \mathbb{R}^n$ на гиперплоскость Γ без касания в момент времени τ.

Используя отображение $q(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ осуществляем переход в пространство Y и получаем точку

$$q(x^*(u^*(\tau)) = y^*(\tau),$$

которая является начальной при движении объекта в пространсве Y по решениям системы (1.2).

Замечание 1.3.1. Если управление $u^*(\tau)$ не является единственным, то получаем множество концов траекторий, действуя на которое отображением $q(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, мы получаем начальное множество в пространсве Y.

В пространстве Y имеем следующую задачу управляемости: найти условия, при которых объект, описываемый системой (1.2) является управляемым из точки $y^*(\tau)$ на множество M_1.

Определение 1.3.1. Объект, описываемый системой (1.2), называется управляемым из $q(x^*(u^*(\tau))) = y^*(\tau)$ в M_1, если на отрезке $[\tau, T]$ существует допустимое управление $v(t) \in V$, что соответствующее ему решение системы (1.2) удовлетворяет граничным условиям $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Рассмотрим решение системы (1.2):

$$y(t) = y^*(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} g(y,v)dt.$$

Чтобы перевести систему из положения $y^*(\tau)$ на множество M_1, необходимо существование момента времени T и управления $v \in V$ таких, что выполнено $y(T) \in M_1$, что условиями задачи не гарантируется.

Тогда наряду с системой (1.2) рассмотрим эту систему в обратном времени

$$\dot{y} = -g(y(t),v(t)), \quad v(t) \in V, \quad t \in [\tau, T], \quad y \in Y. \tag{1.9}$$

с начальным условием

$$y_1 \in M_1.$$

Решение системы (1.9) имеет вид

$$y(t) = y_1(T) - \int\limits_{T}^{t} g(y,v)dt.$$

Тогда для перехода системы из точки $y^*(\tau)$ на множество M_1 требуется существование такого момента времени $t_1 \in [\tau, T]$ и допустимых управлений v_1, v_2, что

$$y^*(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t_1} g(y,v_1)dt = y_1(T) - \int\limits_{T}^{t_1} g(y,v_2)dt.$$

Т.о., получаем следующее условие управляемости из точки $y^*(\tau)$ на множество M_1:

$$\int\limits_{\tau}^{t_1} g(y,v_1)dt + \int\limits_{T}^{t_1} g(y,v_2)dt = y_1(T) - y^*(\tau). \tag{1.10}$$

Итак, при выполнении условия (1.4) и условия управляемости (1.10), осуществляется искомый переход из множества M_0 пространства X на множество M_1 в пространсве Y.

Полученные условия управляемости являются достаточно общими и нуждаются в расшифровке в зависимости от конкретного вида правых частей уравнений в системах, описывающих движение объекта. Далее рассмотрим поставленную задачу для конкретного класса нелинейных систем.

1.4 Случай нелинейных систем треугольного вида

В данной главе исследуется управляемость составной системой следующей структуры: на двух последовательных отрезках времени движение объекта описывается двумя нелинейными треугольными системами, которые путем замены пременных сводятся к линейным системам. Смена фазовых пространств осуществляется с помощью некоторого заданного отображения, с ним же связана и стыковка траекторий. Получены достаточные условия управляемости объекта, описанного нелинейными системами треугольного вида, из заданного начального множества одного пространства в заданное множество другого пространства. Предложен подход к нахождению траекторий, реализующих данное движение.

В настоящей главе рассмотрены нелинейные системы так называемого треугольного вида. Важной особенностью данного класса систем является то, что при определенной замене переменных они отображаются на линейные. Управляемость линейных систем хорошо изучена, что позволяет использовать различные критерии для их исследования. Треугольные системы описывают ряд физических процессов, таких как ориентация спутника на орбите, управление роботом - манипулятором и др. Впервые класс треугольных систем был введен и рассмотрен В.И. Коробовым [69]. Дальнейшее развитие предложенный Коробовым подход получил в работах [70], [72], [71], [73]. В работе [72] приводятся примеры построения отображения нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему. В [73] на правую часть системы наложены более жесткие требования, чем в [71], и тем не менее, применяемую в работе [71] технику построения управлений удалось модифицировать для построения управлений, переводящих заданную точку в заданную.

В теории управления важную роль играют следующие две задачи: при каких условиях существует управление, переводящее систему из одного положение в другое на некотором отрезке времени и если такое управление существует, требуется найти его аналитичесоке представление.

Первая задача для линейных систем к настоящему моменту решена полностью. Получены многочисленные формы необходимых и достаточных условий существования управлений. Для нелинейных же систем задача управляемости далека от своего решения ввиду многообразия классов нелинейных систем и сложностей их описания.

Задача построения аналитического представления управления, переводящего систему из одной точки в другую, впервые была решена Калманом в [3], [10]. Широкие классы управлений в явной форме, переводящих объект из одного положения в другое, были получены В.И. Коробовым, Г.М.Скляром в [74].

1.4.1 Основной результат

В двух фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,\dots,x_n)$ и $y = (y_1,\dots,y_m)$ движение управляемого объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\dots,x_{i+1}), \quad i = 1,\dots,n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,\dots,x_n; u). \end{cases} \tag{1.11}$$

$x \in X, \quad t \in [0,\tau].$

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dt} = g_k(y_1,...,y_{k+1}), \quad k = 1,...,m-1, \\ \frac{dy_m}{dt} = g_m(y_1,...,y_m; v). \end{cases} \tag{1.12}$$

$y \in Y, \quad t \in [\tau, T]$.

Моменты времени τ и T заданы. В пространстве X задано начальное множество M_0 и гиперплоскость перехода $\Gamma = (x,c)$. Стыковка траекторий осуществляется с помощью заданного отображения $q: X \to Y$, $y(\tau) = q(x(\tau))$. Так же посредством этого отображения реализуется переход из одного пространства в другое. В пространстве Y задано конечное множество M_1.

Управляемый объект движется по следующей схеме: на отрезке времени $[0,\tau]$ объект движется из начального множества M_0 по решениям системы (1.11), в момент времени τ объект попадает на Γ и происходит переход в пространство Y под действием отображения $q: X \to Y$, $q(x(\tau)) = y(\tau)$. Полученная точка $y(\tau)$ является начальной для движения объекта в пространстве Y. Дальнейшее движение на отрезке времени $[\tau, T]$ объект осуществляет из точки $y(\tau)$ на множество M_1 по решениям системы (1.12). Причем $y(\tau) \notin M_1$(в противном случае задача решена).

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами(1.11) и (1.12), является управляемым на $[0, T]$ из множества M_0 пространства X на множество M_1 пространства Y. Объект, описываемый системами (1.11) и (1.12), называется управляемым из M_0 в M_1, [64] если на отрезках $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$ существуют допустимые управления $u(t)$ и $v(t)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Условия управляемости объкта, описанного системами (1.11) и (1.12) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1.4.1. *Пусть в системах (1.11) и (1.12) функции* $f_i(x_1, \cdots, x_{i+1}), i = 1,...,n$ *и* $g_k(y_1, \cdots, y_{k+1}), k = 1,...,m$, *имеют непрерывные частные производные до* $(n-i+1)$ *– го и* $(m-k+1)$ *– го порядков включительно и пусть при всех* $x_1, \cdots, x_{n+1}$ *и* $y_1, \cdots, y_{m+1}$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geqslant a > 0,$$

$$\left| \frac{\partial g_k}{\partial y_{k+1}} \right| \geqslant b > 0,$$

где a и b – постоянные, не зависящие от $x_1, \cdots, x_{n+1}$ и $y_1, \cdots, y_{m+1}$ соответственно. И пусть выполнены условия стыковки траекторий $y(\tau) = q(x(\tau))$. Тогда объект, описанный системами (1.11) и (1.12) является управляемым из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y.

Доказательство. Исследуем движение объекта в пространстве X из начального множества M_0 на гиперплоскость перехода Γ на отрезке времени $[0,\tau]$. Рассмотрим следующую задачу управляемости - выбрать управление u таким образом, чтобы попасть из точки $x_0 \in M_0$ в точку $x_1 \in \Gamma$ по решениям системы (1.11). Приведем способ построения управления, решающего поставленную задачу.

Рассмотрим систему (1.11):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2,x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1,...,x_n), \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\dots,x_n;u). \end{cases}$$

Введем замену переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} &z_1 = x_1 \equiv F_1(x_1), \\ &\qquad z_i = \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_1} f_1(x_1,x_2) + ... + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_{i-1}} f_{i-1}(x_1,...,x_i) \equiv \\ &\qquad \equiv F_i(x_1,...,x_i), i = 2,\dots,n. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Введенная замена переменных может быть записана в виде $z = F(x)$, где

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1) \\ F_2(x_1,x_2) \\ \dots \\ F_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 x_1 \\ P_1 P_0 x_1 \\ \dots \\ P_{n-1} P_{n-2} \cdot \ldots \cdot P_0 x_1 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

где $P_0,P_1,\dots,P_{n-1}$ - дифференциальные операторы вида

$$P_0 \equiv I, P_i = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1,\dots,n-1, \tag{1.15}$$

I- тождественный оператор. Через z_{n+1} обозначим новое управление

$$\begin{gathered} z_{n+1} = \frac{\partial F_n}{\partial x_1} f_1(x_1,x_2) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} f_n(x_1, \ldots + x_n,x_{n+1}) \equiv \\ \equiv F_{n+1}(x_1, \ldots + x_n,x_{n+1}) = P_n P_{n-1} P_{n-2} \cdot \ldots \cdot P_0 x_1, \end{gathered} \tag{1.16}$$

где $P_n = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

После такой замены переменных система (1.11) приводится к виду

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, i = 1, \ldots, n. \tag{1.17}$$

Полученная линейная система (1.17) является полностью управляемой за время τ. Это следует из рангового критерия Калмана [3]. Известно, что если система

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

линейна по x и u, и если ранг матрицы $(B,AB,...,A^{n-1}B)$ равен n, то система полностью управляема за время τ.

Система уравнений называется полностью управляемой за время τ, если существует допустимое управление $u(t)$ такое,что соответствующая траектория системы соединяет любые заданные точки за время τ.

Поскольку $x_0 \in M_0$ - произвольная точка начального множества, а $x_1 \in \Gamma$ - произвольная точка на гиперплоскости перехода, в силу полной управляемости системы (1.17) существует допустимое управление, переводящее объект из точки x_0 в точку x_1 за время τ.

В системе (1.17) это новое управление z_{n+1} выберем в виде функции от времени t таким, чтобы за время τ попасть из точки

$$z(0) = (F_1(x_{10}), \ldots ,F_n(x_{10}, \ldots , x_{n0}))^T \tag{1.18}$$

в точку

$$z(\tau) = (F_1(x_{11}), \ldots ,F_n(x_{11}, \ldots , x_{n1}))^T. \tag{1.19}$$

Управление z_{n+1}, например [70], можно выбрать в виде

$$z_{n+1}(t) = -b_0^T e^{-A_0^T t} N^{-1}(z_0 - e^{-A_0 \tau} z_\tau),$$

где

$$N = \int\limits_0^\tau e^{-A_0 t} b_0 b_0^T e^{-A_0^T t} dt.$$

Подставив в левые части соотношений (1.13) и (1.16) вместо z_i функции $z_i(t), i = 1, \ldots, n+1$, из полученных равенств последовательно находим функции $x_1(t), \ldots, x_{n+1}(t)$. Действительно, первое равенство из формул (1.13) и (1.16) дает $x_1 \equiv F(x_1) = z_1(t)$. Если найдены функции $x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t)$ через $z_1(t), \ldots, z_{i-1}(t)$ (пусть $x_j(t) = H_j(z_1(t), \ldots, z_j(t)), j = 1, \ldots, i-1$) , то функция $x_i(t)$ находится из $i-$го равенства соотношений (1.13) и (1.16):

$$F_i(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_i(t)) = z_i(t). \tag{1.20}$$

Для разрешимости уравнения (1.20) достаточно установить, что

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i}, i = 2, \ldots, n+1 \tag{1.21}$$

тогда $|\frac{\partial F_i}{\partial x_i}| \geqslant a > 0$, а это значит, что функция $z_i = F_i(x_1, \ldots, x_i)$ строго монотонна по x_i и при фиксированных значениях $x_1, \ldots, x_{i-1}$ и изменении x_i непрерывно отображает интервал $(-\infty, \infty)$ на интервал $(-\infty, \infty)$, что означает однозначную разрешимость уравнения (1.20). Соотношение (1.21) следует из формул (1.13) и (1.16), т.к.

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial F_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, x_3)\right) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

и т.д. Покажем, что функции

$$x_i(t) = H_i(z_1(t), \ldots, z_n(t)), i = 1, \ldots, n$$

удовлетворяют системе (1.11) при полученном управлении

$$x_{n+1} = H_{n+1}(z_1(t), \ldots, z_{n+1}(t)),$$

которое измеримо, т.к. $H_{n+1}, z_i, i = 1, \ldots, n$ непрерывны от своих аргументов, а $z_{n+1}(t)$ непрерывна по t. Из (1.13) имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial F_i(x_1(t), \ldots, x_i(t))}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}. \tag{1.22}$$

Так как $\dot{z}_i = z_{n+1}(t) = F_{i+1}(x_1(t), \ldots, x_{i+1}(t)$, то

$$\dot{z}_i = \frac{\partial F_i(x_1(t), \ldots, x_i(t))}{\partial x_j} f_j(x_1(t), \ldots, x_{j+1}(t)). \tag{1.23}$$

Таким образом, равенства (1.22) и (1.23) дают

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial F_i(x_1(t),\ldots,x_i(t))}{\partial x_j}\times\left(\frac{dx_j}{dt}-f_j(x_1(t),\ldots,x_{j+1}(t)\right)=0, i=1,\ldots,n. \tag{1.24}$$

Определитель Δ полученной системы относительно

$$\frac{dx_j}{dt}-f_j(x_1(t),\ldots,x_{j+1}(t)), j=1,\ldots,n$$

отличен от нуля, так как

$$\Delta=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^{n-1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)^{n-2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right)\neq 0.$$

Тогда из (1.24) вытекает, что

$$\frac{dx_j}{dt}-f_j(x_1(t),\ldots,x_{j+1}(t)), j=1,\ldots,n$$

где $x_{n+1}(t) = u(t)$. Так как траектория $z(t)$ проходит через точки (1.18), (1.19), то в силу однозначной разрешимости соотношения (1.13) относительно $x_1,\ldots,x_n$, полученные функции $x_i(t)$ удовлетворяют граничным условиям $x_i(0)=x_{i0}, x_i(\tau)=x_{i1}, i=1,\ldots,n$.

После попадания объекта на гиперплоскость перехода Г, осуществим переход в пространство Y с помощью отображения $q: X\to Y$ и получим начальную точку при движении объекта в пространстве Y $y(\tau)=q(x(\tau))$. Причем полученная точка не принадлежит конечному множеству $M_1\in Y$. Таким образом в пространстве получили следующую задачу:

для объекта, движение которого описывается системой уравнений

$$\begin{cases}\frac{dy_k}{dt}=g_k(y_1,...,y_{k+1}), \quad k=1,...,m-1,\\ \frac{dy_m}{dt}=g_m(y_1,...,y_m;v).\end{cases} \tag{1.25}$$

$y\in Y=R^m$, $\quad t\in[\tau,T]$, найти такое допустимое управление v, что соответствующее ему решение системы (1.25) будет удовлетворять граничным условиям $y(\tau)=q(x(\tau))$, $y(T)\in M_1$. Аналогично пространству X введем замену переменных и сведем нелинейную систему к линейной.

$$\begin{aligned}z_1=y_1\equiv G_1(y_1),\\ z_k=\frac{\partial G_{k-1}}{\partial y_1}g_1(y_1,y_2)+...+\frac{\partial G_{k-1}}{\partial y_{k-1}}g_{k-1}(y_1,...,y_k)\equiv\\ \equiv G_k(y_1,...,y_k), k=2,\ldots,m.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Управление обозначим через

$$z_{m+1} = \frac{\partial G_m}{\partial y_1} g_1(y_1,y_2) + \ldots + \frac{\partial G_m}{\partial y_m} g_m(y_1, \ldots + y_m, y_{m+1}) \equiv \\ \equiv G_{m+1}(y_1, \ldots + y_m, y_{m+1}). \tag{1.27}$$

В результате такой замены, система (1.25) примет вид

$$\dot{z}_k = z_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{1.28}$$

Как и в предыдущем случае, система (1.28) в силу рангового критерия Калмана [76] является полностью управляемой. То есть существует такое допустимое управление v, которое переводит объект, описанный данной системой, из любой точки в любую на отрезке времени $[\tau, T]$. В силу полной управляемости системы, в качестве начальной точки возьмем $y(\tau)$, а в качестве конечной - произвольную точку $y(T) \in M_1$. Найдем траекторию, соединяющую эти точки. В системе (1.28) выберем новое управление z_{m+1} в виде функции от времени t таким образом, чтобы за время $T - \tau$ попасть из точки

$$z(\tau) = (G_1(y_{10}), \ldots, G_m(y_{10}, \ldots, y_{m0}))^T \tag{1.29}$$

в точку

$$z(T) = (G_1(y_{11}), \ldots, G_m(y_{11}, \ldots, y_{m1}))^T. \tag{1.30}$$

Управление z_{m+1} выберем в виде

$$z_{m+1}(t) = b_0^T e^{C_0^T(T-t)} N^{-1}(z_T - e^{C_0^T(T-\tau)} z_\tau),$$

где

$$N = \int_\tau^T e^{C_0(T-t)} b_0 b_0^T e^{C_0^T(T-t)} dt.$$

Подставляя в левые части формул (1.26) и (1.27) вместо z_i функции $z_i(t), i = 1, \ldots, m+1$, из полученных равенств последовательно находим функции $y_1(t), \ldots, y_{m+1}(t)$. В силу однозначной разрешимости соотношения (1.26) (которая доказывается аналочично случаю в пространстве X), полученные функции $y_1(t), \ldots, y_{m+1}(t)$ удовлетворяют граничным условиям $y_i(\tau) = y_{i\tau}, y_i(T) = y_{iT}, i = 1, \ldots, m$. Таким образом, доказана управляемость объекта, описанного системами (1.1) и (1.2) из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0,T]$. Также явно получены уравнения траекторий, удовлетворяющие заданным граничным условиям. Что и доказывает теорему. □

Рассмотрим пример, иллюстрирующий данный подход к исследованию.

Пример 1.4.1. В пространствах $X = \mathbb{R}^3$ и $Y = \mathbb{R}^3$ движение управляемого объекта задается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^4 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1^3 x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -28x_1^{10} - 28x_1^6 x_2 + u, \quad t \in [0,1]. \end{cases} \tag{1.31}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1^2 + y_2, \\ \dot{y}_2 = -4y_1 y_2 + y_3, \\ \dot{y}_3 = -48y_1^4 - 24y_1^2 y_2 + v, \quad t \in [1,2]. \end{cases} \tag{1.32}$$

В пространстве $X = \mathbb{R}^3$ задано начальное множество $M_0 = (1,1,2)$, в пространстве $Y = \mathbb{R}^3$ задано конечное множество $M_1 = (0,-1,1)$. Движение объекта осуществляется по следующей схеме: на отрезке времени $[0,1]$ объект движется по решениям системы (1.31) из начального множества M_0 в точку $(0,0,0)$, далее происходит переход в пространство $Y = \mathbb{R}^3$, заданный отображением $q(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,y_3)$ и дальнейшее движение на отрезке времени $[1,2]$ осуществляется по решениям системы (1.32). Требуется определить, является ли объект управляемым из множества $M_0 \in X$ на множество $M_1 \in Y$ на отрезке $[0,2]$ и найти траектории, реализующие этот переход. Применим указанный выше подход к исследованию. Рассмотрим движение объекта в пространстве $X = \mathbb{R}^3$. Исследуем задачу управляемости из точки $x(0) = (1,1,2)^T$ в точку $x(1) = (0,0,0)^T$ на отрезке $[0,1]$. С помощью замены переменных

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_1^4 + x_2, \\ z_3 = 4x_1^7 + x_3 \end{cases} \tag{1.33}$$

система (1.31) отображается на линейную систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = u. \end{cases} \tag{1.34}$$

Полученная линейная система (1.34) в силу рангового критерия Калмана является полностью управляемой. Новое управление выберем таким образом , чтобы за время $T = 1$ попасть из точки $z(0) = (1{,}2{,}6)^T$ в точку $z(1) = (0{,}0{,}0)^T$. Его можно взять [70], например, в виде

$$u(t) = -b_0^T e^{-A_0^T t} W^{-1}(z(0) - e^{-A_0 1} z(1)),$$

где W^{-1}- матрица обратная к матрице

$$W = \int\limits_0^1 e^{-A_0 t} b_0 b_0^T e^{-A_0^T t} dt.$$

Тогда управление имеет вид

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 720 & 360 & 60 \\ 360 & 192 & 36 \\ 60 & 36 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$= -900t^2 + 960t - 186.$$

Подставляя полученное управление в систему (1.34) и учитывая краевые условия, получим

$$\begin{cases} z_1(t) = -15t^5 + 40t^4 - 31t^3 + 3t^2 + 2t + 1, \\ z_2(t) = -75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2, \\ z_3(t) = -300t^3 + 480t^2 - 186t + 6. \end{cases} \tag{1.35}$$

Делая обратную замену, получаем, что траектории системы (1.31), соединяющие точки $x(0) = (1{,}1{,}2)^T$ и $x(1) = (0{,}0{,}0)^T$, на отрезке времен $[0, 1]$ имеют вид

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) = -15t^5 + 40t^4 - 31t^3 + 3t^2 + 2t + 1, \\ x_2(t) = z_2(t) - x_1^4 = -75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2- \\ -(75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2)^4, \\ x_3(t) = z_3(t) - 4x_1^7 = -300t^3 + 480t^2 - 186t + 6- \\ -4(75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2)^7. \end{cases} \tag{1.36}$$

Теперь, используя отображение $q : X \to Y$, $q(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,y_3)$, перейдем в пространство $Y = \mathbb{R}^3$. Полученная точка $y(1) = q(0,0,0) = (0,0,0)$ является начальной при движении объекта в этом пространстве по решениям системы (1.32). Таким образом, получили следующую задачу управляемости: из точки $y(1) = (0,0,0)^T$ попасть в точку $y(2) = (0,-1,1)^T$ на отрезке времени [1,2]. Сведем систему (1.32) к линейной с помощью замены переменных

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = 2y_1^2 + y_2, \\ z_3 = 8y_1^3 + y_3. \end{cases} \tag{1.37}$$

После такой замены система примет вид

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2, \\ \dot z_2 = z_3, \\ \dot z_3 = v. \end{cases} \tag{1.38}$$

Аналогично предыдущему случаю, в силу полной управляемости полученной линейной системы, управление, переводящее систему (1.38) из точки $z(1) = (0,0,0)^T$ в точку $z(2) = (0,-1,1)^T$ выберем в виде [70]:

$$v(t) = b_0^T e^{A_0^T(2-t)} N^{-1}(z(2) - e^{A_0(2-t)} z(1)),$$

где N^{-1}- матрица обратная к матрице

$$N = \int\limits_1^2 e^{A_0(2-t)} b_0 b_0^T e^{A_0^T(2-t)} dt.$$

Управление имеет вид

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-t & 1 & 0 \\ \frac{(2-t)^2}{2} & 2-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 720 & -360 & 60 \\ -360 & 192 & -36 \\ 60 & -36 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 210t^2 - 612t + 429.$$

Подставляя полученное управление в систему (1.38), находим траектории

$$\begin{cases} z_1(t) = 3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16, \\ z_2(t) = 17{,}5t^4 - 102t^3 + 214{,}5t^2 - 193t + 63, \\ z_3(t) = 70t^3 - 306t^2 + 429t - 193. \end{cases} \tag{1.39}$$

Из формулы (1.37) получаем тректории исходной системы (1.32), соединяющие точки $y(1) = (0{,}0{,}0)^T$ и $y(2) = (0,-1{,}1)^T$ на отрезке времени $[1{,}2]$.

$$\begin{cases} y_1 = z_1 = 3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16, \\ y_2 = z_2 - 2y_1^2 = \\ = 17{,}5t^4 - 102t^3 + 214{,}5t^2 - 193t + 63- \\ -2(3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16)^2, \\ y_3 = z_3 - 8y_1^3 = \\ = 70t^3 - 306t^2 + 429t - 193- \\ -8(3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16)^3. \end{cases} \tag{1.40}$$

Таким образом, получаем, что объект, описываемый системами (1.31) и (1.32), является управляемым из множества $M_0 = (1{,}1{,}2)$ пространства $X = \mathbb{R}^3$ на множество $M_1 = (0,-1{,}1)$ пространства $Y = \mathbb{R}^3$ на отрезке времени $[0{,}2]$. При этом траектории, по которым реализуется переход, имеют вид

$$\begin{cases} x_1(t) = z_1(t) = -15t^5 + 40t^4 - 31t^3 + 3t^2 + 2t + 1, \\ x_2(t) = z_2(t) - x_1^4 = -75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2- \\ -(75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2)^4, \\ x_3(t) = z_3(t) - 4x_1^7 = -300t^3 + 480t^2 - 186t + 6- \\ -4(75t^4 + 160t^3 - 93t^2 + 6t + 2)^7, \quad t \in [0{,}1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16, \\ y_2 = 17{,}5t^4 - 102t^3 + 214{,}5t^2 - 193t + 63- \\ -2(3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16)^2, \\ y_3 = 70t^3 - 306t^2 + 429t - 193- \\ -8(3{,}5t^5 - 25{,}5t^4 + 71{,}5t^3 - 96{,}5t^2 + 63t - 16)^3, \quad t \in [1{,}2]. \end{cases}$$

Глава 2. Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства

В данной главе получены достаточные условия управляемости дифференциальных систем в задаче со сменой фазового пространства. Рассмотрены подходы к исследованию как нелинейных, так и линейных систем. Условия управляемости для нелинейного случая получены с помощью аппарата выпуклого анализа, теории многозначных отображений и теории управляемости. Для линейных систем построен пример, иллюстрирующий данный подход к решению поставленной задачи.

Результаты данной главы опубликованы соискателем в следующих научных публикациях:

– Maximova, I. The Problem of Controllability with Phase Space Change. Advances in Systems Science and Applications, 2023,— 23(1),—P. 61–68. https://doi.org/10.25728/assa.2023.23.01.1364

2.1 Управляемость нелинейных систем

2.1.1 Постановка задачи

Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_m)$. Обозначим $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $\Omega(\mathbb{R}^m)$ - совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответственно. Пусть заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0,\tau]; \tag{2.1}$$

$$\dot{y}(t) = g(t,y(t),v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \tag{2.2}$$

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in L_\infty([0,\tau], R^n)$, $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], R^m)$, для которых $u(t) \in U$ при п.в. $t \in [0,\tau]$ и $v(t) \in V$ при п.в. $t \in [\tau, T]$. Решениями систем (2.1) и (2.2) при $t \in [0,\tau]$ и $t \in [\tau, T]$ называются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на $[0,\tau]$ и $[\tau, T]$ системам (2.1) и (2.2) соответственно. Пусть функции $f(t,x,u)$, $g(t,y,v)$ таковы, решение задачи Коши для систем (2.1) и (2.2) существует и единственно.

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ. Пусть τ - наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. Когда объект, движущийся по закону (2.1), достигает гиперповерхности Γ, происходит переход в пространство Y, заданный отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (2.2). Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Подобная схема движения объекта описана, например, в [19].

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (2.1) и (2.2), будет управляемым из M_0 в M_1.

Определение 2.1.1. *Объект, описываемый системами (2.1) и (2.2), называется управляемым из* M_0 *в* M_1, *если существуют такие допустимые управления* $u(\cdot)$ *и* $v(\cdot)$, *что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям* $x(0) \in M_0$, $x(\tau) \in \Gamma$ *и* $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$.

Для системы (2.1) в фазовом пространстве $X = \mathbb{R}^n$ в точке x рассмотрим множество $f(t,x,U)$, состоящее из всех векторов $f(t,x,u)$, где u принадлежит множеству U. Если $x(t)$ - некоторая траектория системы (2.1), соответствующая допустимому управлению $u(t)$, то при почти всех $t \in [0,\tau]$ выполняется включение

$$\dot{x}(t) \in f(t,x(t),U). \tag{2.3}$$

Это приводит нас к дифференциальному включению

$$\dot{x} \in f(t,x,U). \tag{2.4}$$

Под решением дифференциального включения (2.4) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, определенная на интервале $[0,\tau]$, удовлетворяющая включению (2.3) при почти всех $t \in [0,\tau]$.

Итак, при довольно общих предположениях система (2.1) эквивалентна дифференциальному включению (2.4), т.е. для любого решения $x(\cdot)$ включения (2.4) существует такое допустимое управление $u(\cdot)$, что функция $x(\cdot)$ будет являться траекторией системы (2.1) с этим управлением $u(\cdot)$. Этот вопрос довольно подробно рассматривается в [79].

Теперь, при сделанных замечаниях, вместо нелинейной системы (2.1) будем рассматривать дифференциальное включение (2.4). Обозначим $f(t,x,U)$ через $F(t,x)$, тогда в пространстве $X = \mathbb{R}^n$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t,x), \;\; t \in [0,\tau], \tag{2.5}$$

где $F(t,x)$ - многозначное отображение. Аналогично в пространстве $Y = \mathbb{R}^m$ движение управляемого объекта описывается дифференциальным включением

$$\dot{y} \in G(t,y), \;\; t \in [\tau,T]. \tag{2.6}$$

Движение объекта из пространства X в пространство Y осуществляется по схеме, описанной выше.

2.1.2 Основной результат

Определение 2.1.2. [79] *Многозначное отображение $F(t,x)$ называется вогнутым по x на множестве M, если для любых точек $x_1,x_2 \in M$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется условие*

$$\lambda F(t,x_1) + (1-\lambda)F(t,x_2) \subset F(t,\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Заметим, что из этого условия следует (см., например, [79]) выпуклость множества $F(t,x)$ при каждом $x \in M$. Множество достижимости $K(t)$ для каждого $t \in [0,\tau]$ состоит из всех точек $x(t) \in \mathbb{R}^n$, где $x(t)$ - решение включения (2.5) с начальным условием $x(0) \in M_0$.

Происхождение термина "вогнутость многозначного отображения"(см. [80]) связано с тем обстоятельством, что в этом случае опорная функция

$$c(F(t,x),\psi) = \max_{f \in F(t,x)} (f,\psi)$$

является вогнутой функцией по переменной x для любого сопряженного вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Если многозначное отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, то оно является линейным по переменной x, т.е. представимо в виде

$$F(t,x) = A(t)x + F(t,0)$$

$A(t)$ – некоторая матрица.

Рассмотрим движение объекта в пространстве X из начального множества M_0 до "гиперповерхности перехода" Γ. Предположим, что отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0,\tau]$. Известно (см. [79]), что в этом случае семейство всех решений на отрезке $[0,\tau]$ с начальным условием $x(0) \in M_0$ будет выпуклым множеством в пространстве $C[0,\tau]$.

Выпуклость семейства решений дифференциального включения впервые была получена В.И. Благодатских в работе [81] и в более полном виде содержится в обзоре [79].

Из выпуклости семейства решений следует выпуклость множества достижимости $K(\tau)$. Обратное утверждение не выполняется, например, для линейных управляемых систем

$$\dot{x} = Ax + u, u \in U.$$

Для них множество достижимости всегда выпукло, если начальное множество является выпуклым, а семейство решений выпукло лишь при условии выпуклости множества U.

Если семейство решений выпукло в пространстве $C[0,\tau]$, то каждое множество достижимости $K(\tau)$ также будет выпуклым в пространсве $\mathbb{R}^n$.

Итак, при сделанных предположениях, множество достижимости $K(\tau)$ выпукло. Пересекая его с "гиперповерхностью перехода" Γ, получим множество

$$K_1(\tau) = K(\tau) \cap \Gamma.$$

Предположим, что существует τ такое, что $K_1(\tau) \neq \varnothing$. Тогда $K_1(\tau)$ является выпуклым, как пересечение двух выпуклых множеств. Преобразуем множество $K_1(\tau)$ следующим образом: $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$. Полученное множество $K_2(\tau)$ выпукло в силу свойств отображения q. Множество $K_2(\tau)$ является начальным множеством при движении объекта в пространстве Y в множество M_1.

В пространсве Y мы получили следующую задачу управляемости: является ли система (2.2) управляемой из множества $K_2(\tau)$ в множество M_1 на отрезке времени $[\tau, T]$. Обозначим через $K_3(T)$ множество достижимости системы (2.2) из $K_2(\tau)$ в момент времени T. Предположим, что отображение $G(t,y)$ вогнуто по y на множестве достижимости $K_3(T)$ и $K_3(T)$ компактно. Тогда, для управляемости системы (2.2) будет достаточно, чтобы $K_3(T) \cap M_1 \neq \varnothing$ или по свойству опорных функций $c(K_3(T),\psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$ (см. [82]).

Итак, условия управляемости из множесва M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y для систем (2.1) и (2.2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1.1. *Пусть отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0,\tau]$ и пусть $G(t,y)$ вогнуто по y на множестве $K_3(T)$ при всех $t \in [\tau, T]$. $K_3(T)$ - множество достижимости системы (2.2) из $K_2(\tau)$ в момент времени T, где $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$. Тогда для управляемости объекта, описываемого системами (2.1) и (2.2), на отрезке времени $[0,T]$ достаточно, чтобы было выполнено следующее соотношение $c(K_3(T),\psi) + c(M_1, -\psi) \geqslant 0$, для любого $\psi \in \mathbb{R}^m$.*

Замечание 2.1.1. Известно [79], что если $F(t,x)$ липшицево по (t,x), тогда для выпуклости семейства решений необходимо и достаточно, чтобы отображение $F(t,x)$ было вогнуто по x на каждом множестве достижимости $K(t), t \in [0,\tau]$. Таким образом, если отображение $F(t,x)$ системы (2.5) дополнительно к сформулированным выше условиям является еще и липшицевым по (t,x), тогда теорема 2.1.1 становится необходимым и достаточным условием управляемости.

Замечание 2.1.2. Для нелинейных систем выписать множество достижимости в явном виде удается не всегда. Часто оказывается проще найти внешнюю оценку для множества достижимости. В случае, если известна внешняя оценка для множества достижимости, можно воспользоваться следующим результатом (см. [79]): пусть известно, что множество достижимости содержится в некотором множестве:

$$K(\tau) \subset M, \quad \tau \in [0,\tau],$$

а многозначное отображение $F(t,x)$ вогнуто по x на множестве M. Тогда семейство решений является выпуклым.

Таким образом, в случае невозможности нахождения множества достижимости в явном виде, достаточно выписать для него внешнюю оценку и применять теорему 2.1.1 для этой внешней оценки.

Замечание 2.1.3. Для автономной системы (2.2) можно рассматривать движение объекта в пространстве Y в "обратном времени" и выписывать множество достижимости $K_4(T)$ из множества M_1 на "гиперповерхность перехода" Г. Тогда условием управляемости для систем (2.1) и (2.2) на отрезке времени $[0,T]$ будет непустое пересечение множеств $K_4(T)$ и $K_2(\tau)$.

2.2 Управляемость линейных систем

В этой части работы рассмотрим случай, когда движение управляемого объекта описывается линейными системами дифференциальных уравнений. Пусть системы (2.1) и (2.2) линейны, тогда получаем следующую задачу.

2.2.1 Постановка задачи

Имеются два фазовых пространства $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_m)$. Заданы множества $U \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Движение объекта описывается следующими системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0,\tau]; \tag{2.7}$$

$$\dot{y} = By + v, \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau,T]. \tag{2.8}$$

Класс допустимых управлений — это множества функций

$$\{u(\cdot) \in L_\infty([0,\tau],\mathbb{R}^n) \mid u(t) \in U, \, t \in [0,\tau]\},$$

$$\{v(\cdot) \in L_\infty([\tau,T],\mathbb{R}^m) \mid v(t) \in V, \, t \in [\tau,T]\}.$$

В X заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ. Число τ — наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. В пространстве X также задано линейное отображение $q : X \to Y$, с помощью которого осуществляется переход из одного фазового пространства в другое. Движение объекта из одного пространства в другое происходит также как и в первой части главы. Наконец, в Y задано конечное множество $M_1 \in \Omega(R^m)$ (не пересекающееся с множеством $q(\Gamma)$). Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (2.7) и (2.8), будет управляемым из M_0 в M_1.

2.2.2 Основной результат

Множество достижимости $K(\tau)$ для системы (2.7) — это множество концов траекторий системы (2.7) с начальным множеством M_0, соответсвующих всевозможным допустимым управлениям $u(\cdot)$, и рассматриваемое в момент времени τ. В силу линейности системы (2.7) множество достижимости может быть выписано явно (см. [82]):

$$K(\tau) = e^{\tau A} M_0 + \int\limits_0^{\tau} e^{(\tau - s)A} U ds, \tag{2.9}$$

здесь $e^{\tau A} M_0$ - образ множества M_0 при линейном преобразовании $e^{\tau A}$, а под знаком интеграла стоит многозначное отображение, которое получается для всех $s \in [0,\tau]$ как образ множества U при линейном преобразовании $e^{(\tau - s)A}$. Формула (2.9) следует из формулы Коши для решения системы дифференциальных уравнений, определений множества достижимости, образа множества при линейном преобразовании, алгебраической суммы множеств и интеграла Лебега от многозначного отображения.

В некоторых случаях существует возможность нахождения множества достижимости в явном виде с помощью опорных функций. Итак, для нахождения множества достижимости с начальным выпуклым множеством M_0 сначала вычислим его опорную функцию, а затем восстановим множество $K(\tau)$ по его опорной функции. В силу свойств опорных функций, выпуклое множество однозначно восстанавливается по своей опорной функции [82]. Итак, опорная функция множесва достижимости имеет вид:

$$c(K(\tau),\psi) = c(M_0, e^{\tau A^*} \psi) + \int\limits_0^{\tau} c(U, e^{sA^*} \psi) ds. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) следует из формулы (2.9), свойств опорных функций и того факта, что опорная функция от интеграла равна интегралу от опорной функции в случае непрерывности многозначного отображения под знаком интеграла. Поскольку начальное множество является выпуклым, то и множество достижимости тоже будет выпуклым [82].

Далее, восстановленное по опорной функции множество $K(\tau)$ пересечем в момент времени τ с "гиперповерхностью перехода" Г. Получим, по предположению, выпуклое множество

$$K_1(\tau) = K(\tau) \cap \Gamma.$$

Предположим, что существует $\tau : K_1(\tau) \neq \varnothing$. Преобразуем множество $K_1(\tau)$ следующим образом: $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$. Тогда множество $K_2(\tau)$ является выпуклым в силу свойств отображения q. Множество $K_2(\tau)$ - начальное множество для системы (2.8) при движении объекта в пространстве Y в множество M_1.

Итак, в пространсве Y мы получили следующую задачу управляемости: является ли система (2.8) управляемой из множества $K_2(\tau)$ в множество M_1 на отрезке времени $[\tau, T]$.

Определим функцию управляемости [82] $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ соотношением

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*}\psi)ds. \tag{2.11}$$

По теореме об управляемости [82], объект является управляемым на отрезке времени $[\tau, T]$ из множества $K_2(\tau)$ на множество M_1 тогда и только тогда, когда для любого вектора $\psi \in S$ функция управляемости неотрицательна, т.е.

$$\varphi(\psi) \geqslant 0,$$

а это в свою очередь эквивалентно условию

$$\varphi_0 = \min_{\psi \in S} \varphi(\psi) \geqslant 0.$$

Здесь S – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0. Применяя данную теорему, выпишем условия управляемоти для поставленной задачи, которые можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2.1. *Пусть заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая "гиперповерхность перехода" Γ, линейное отображение $q : X \to Y$, конечное множество $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$. Для управляемости объекта, описываемого системами (2.7) и (2.8) на отрезке $[0, T]$ достаточно, чтобы функция управляемости*

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*}\psi) + c(M_1, -\psi) + \int_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*}\psi)ds$$

была неотрицательна для любых $\psi \in S$, здесь $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$.

Замечание 2.2.1. Функция управляемости $\varphi(\psi)$ зависит лишь от длины отрезка времени $[\tau, T]$. Т.о. для любого отрезка времени длины $T - \tau$ она принимает одинаковые значения. Полученная теорема 2.2.1. об управляемости позволяет находить или оценивать такой отрезок времени, на котором объект является управляемым.

2.2.3 Пример

Теперь рассмотрим пример, иллюстрирующий описанный выше подход к решению поставленной задачи.

Имеются два пространства $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$, движение объекта в которых описывается следующими системами уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \qquad |u| \leqslant 1, \ \ u = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{x}_3 = u_3, \qquad t \in [0,\tau], \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + v_1, \qquad\qquad |v| \leqslant 1, \ \ v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{y}_2 = v_2, \qquad t \in [\tau,T]. \end{cases} \tag{2.13}$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ задано начальное множество $M_0 = \{(0,-1,0)\}$ и "гиперповерхность перехода," которая имеет вид

$$\Gamma = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0, x_3 \geqslant 0\}.$$

Здесь τ - наименьший момент времени, при котором объект достигает гиперповерхности Γ. Отображение, осуществляющее переход из пространства $\mathbb{R}^3$ в пространство $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$q(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + \sin\tau, x_3) = (y_1,y_2).$$

В пространстве $\mathbb{R}^2$ задано конечное множество

$$M_1 = \{y = (y_1,y_2) \, : \, y_1^2 + (y_2+3)^2 \leqslant 1\}.$$

Требуется найти условия, при которых объект, описываемый системами (2.12) и (2.13), будет управляемым из M_0 в M_1 на отрезке времени $[0,T]$.

Решение: Множество достижимости системы (2.12) из множества M_0 в момент времени τ обозначим через $K(\tau)$. Рассмотрим движение объекта в пространстве $\mathbb{R}^3$. Опорная функция множества достижимости $K(\tau)$ из (2.10) имеет вид:

$$c(K(\tau),\psi) = -\psi_1 \sin\tau - \psi_2 \cos\tau + \tau\|\psi\|.$$

Восстанавливая множество $K(\tau)$ по функции $c(K(\tau),\psi)$, получаем, что множество достижимости $K(\tau)$ - это круг радиуса τ с центром в точке $(-\sin\tau, -\cos\tau, 0)$. Пересечение множества достижимости с "гиперповерхностью перехода " Γ происходит при $\tau > 1$ и является отрезком с концами в точках с координатами

$$(-\sin\tau - \sqrt{\tau^2 - \cos^2\tau},0,0) \quad \text{и} \quad (-\sin\tau + \sqrt{\tau^2 - \cos^2\tau},0,0).$$

Переходим в пространство $\mathbb{R}^2$ под действием отображения q. Получаем множество $K_1(\tau)$, которое является начальным для системы (2.13) при движении объекта в пространстве $\mathbb{R}^2$. Множество $K_1(\tau)$ это отрезок с концами в точках с координатами

$$(-\sqrt{\tau^2 - \cos^2\tau},0) \quad \text{и} \quad (\sqrt{\tau^2 - \cos^2\tau},0).$$

Итак, в пространстве $\mathbb{R}^2$ имеем следующую задачу управляемости. Найти такие условия на системы (2.12) и (2.13), чтобы объект описываемый этими системами являлся управляемым из множества $K_1(\tau)$ в множество M_1.

Функция управляемости в данном случае имеет вид

$$\varphi(\psi) = \sqrt{\tau^2 - \cos^2\tau} \cdot |\psi_1| + \|\psi\| + 3\psi_2 + \int\limits_0^{T-\tau} \sqrt{\psi_1^2 + (s\psi_1 + \psi_2)^2} ds,$$

здесь $\|\psi\| = 1$. Минимум функции управляемости будет достигаться при $\psi_2 = -1$, тогда в силу того, что $\|\psi\| = 1$, $\psi_1 = 0$. Получаем, что

$$\min_{\psi\in S} \varphi(\psi) = T - (2 + \tau).$$

Итак, при $T > 2 + \tau$ объект, описываемый системами (2.12) и (2.13), будет управляемым на отрезке времени $[0,T]$ из множества M_0 в множество M_1.

Глава 3. Применение локальной управляемости к исследованию задачи управляемости со сменой фазового пространства

В настоящей главе исследуется возможность применения локальной управляемости для решения задачи управляемости со сменой фазового пространства, сформулированной в главе 1.

Результаты данной главы опубликованы соискателем в следующих научных публикациях:

– Максимова И.С. Управляемость нелинейных систем со сменой фазового пространства, Таврический вестник информатики и математики, 2021,—№2(51),—С. 53–64.
– Maximova Irina, Local Controllability in the Problem with Variable structure, 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD), Moscow, 2023,—P. 1–3, doi:10.1109/MLSD58227.2023.10303947.

3.1 Постановка задачи

В фазовых пространствах $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ движение объекта описывается нелинейными управляемыми системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n; v), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $t \in [0,\tau]$, $x(t) \in X$.

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \tag{3.2}$$

где $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $t \in [\tau, T]$, $y(t) \in Y$, $B(t)$ - матрица размера $m \times r$ специального вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau,T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение. Специальный вид управляющего воздействия обусловлен физическими приложениями [83].

Моменты времени τ и T заданы. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}$, $0 \in int\Omega$. Здесь $int\Omega-$ внутренность множества Ω.

Функции $f(y)$, $g_i(x_1, \ldots, x_i), i = \overline{1,n}$ таковы, что решение задачи Коши для систем (3.1) и (3.2) существует и единственно.

Будем использовать схему движения управляемого объекта с переходом системы через ноль. Опишем эту схему подробно.

В пространстве X задано некоторое начальное множество M_0, в пространстве Y задано конечное множество M_1. На отрезке времени $[0,\tau]$ объект движется по закону (3.1) из начального множества M_0, в момент времени τ он попадает в точку ноль. Далее происходит переход в пространство Y, заданный некоторым отображением $q : X \to Y$, и дальнейшее движение осуществляется в пространстве Y по закону (3.2). Причем $q(x(\tau)) \notin M_1$ (если $q(x(\tau)) \in M_1$, то задача решена).

Задача: найти условия, при которых объект, описываемый системами (3.1) и (3.2), будет управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y.

Объект, описываемый системами (3.1) и (3.2), называется управляемым из M_0 в M_1, если существуют такие допустимые управления v и $u(\cdot)$, что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям $x(0) \in M_0$, $x(\tau) = 0$ и $y(\tau) = q(x(\tau))$, $y(T) \in M_1$ [65].

3.2 Исследование управляемости

Для решения поставленной задачи будем использовать следующий подход. Пусть при выполнении некоторых условий, объект, описываемый системой (3.1) является полностью управляемым. Тогда найдется допустимое управление, переводящее объект из заданного начального множества M_0 в ноль пространства X по решениям системы (3.1) на отрезке времени $[0,\tau]$. Далее осуществим переход в пространство Y, заданный отображением $q : X \to Y$, причем $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau) = 0$. Причем $0 \notin M_1$. В пространстве Y при некоторых условиях объект, описываемый системой (3.2) является локально нуль - управляемым. Если конечное заданное множество M_1 содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, то по определению локальной управляемости мы имеем возможность попасть из нуля в M_1. Условия управляемости данного объекта можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 3.2.1. *Пусть функции $g_i(x_1, \ldots ,x_{i+1})$, $\quad i = 1, \ldots ,n$, имеют непрерывные частные производные до $(n - i + 1)$ - го порядка включительно и при всех $x_1, \ldots , x_{n+1}$*

$$|\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}}| \geqslant b > 0, \quad i = 1, \ldots ,n$$

где b - постоянная, не зависящая от $x_1, \ldots ,x_{n+1}$. Пусть $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t)$. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение. Также на отрезке $[\tau,T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен m, где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t),...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Тогда объект, описываемый системами (3.1) и (3.2), является управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0,T]$.

Доказательство. Рассморим управляемость нелинейных систем в пространсте X. В пространстве X переменных $x = (x_1, \ldots ,x_n)$ рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1,x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1,x_2,x_3), \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \ldots ,x_{n-1},x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \ldots ,x_{n-1},x_n; v), \end{cases} \tag{3.3}$$

где $v \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \tau], \quad x \in \mathbb{R}^n = X.$

Рассмотрим следующую задачу управляемости - выбрать управление v таким образом, чтобы попасть из множества M_0 в ноль в пространстве X по решениям системы (3.3). В главе 1 был приведен пример, в котором дан способ выбора управления, решающего поставленную задачу.

Обозначим v через x_{n+1} и сформулируем теорему об управляемости системы (3.3) (см. [70]):

Пусть в системе (3.3) функции $g_i(x_1, \ldots, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n$, имеют непрерывные частные производные до $(n-i+1)$ - го порядка включительно и пусть при всех $x_1, \ldots, x_{n+1}$

$$|\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}}| \geqslant b > 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

где b - постоянная, не зависящая от $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Тогда система (3.3) полностью упраявляема за время τ.

Объект, описываемый системой (3.3), называется полностью управляемым на отрезке $[0, \tau]$, если для любых $x_0, x_1 \in R^n$ найдется допустимое управление $v(t) \in V$ на $[0, \tau]$, переводящее систему (3.3) из состояния x_0 в момент времени 0 в состояние x_1 в момент времени τ.

При выполнении условий данной теоремы, система (3.3) полностью управляема за время τ, тогда по определению полной управляемости, найдется допустимое управление, переводящее объект из заданного начального множества M_0 в ноль пространства X по решениям системы (3.3) на отрезке времени $[0,\tau]$, тем самым осуществляется искомый переход системы (3.3) из множества M_0 в ноль в пространстве X.

Далее осуществим переход в пространство Y, заданный отображением $q : X \to Y$, причем $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau) = 0$. Продолжим исследование в пространстве Y - рассмотрим условия локальной нуль - управляемости для нелинейной системы специального вида.

В пространстве $Y = \mathbb{R}^m$ рассмотрим управляемую систему:

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \tag{3.5}$$

где $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$, $t \in [\tau, T]$.

$B(t)$ - матрица размера $m \times r$ вида: $B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t)$. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение.

Допустимыми управлениями являются всевозможные функции $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u(\cdot) \in L_\infty[\tau, T]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}$, $0 \in int\Omega$.

Задача: Найти условия локальной нуль - управляемости системы (3.5) на $[\tau,T]$ и выразить их через элементы матриц A, B_1 и B_2, где

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0.$$

Обозначим через $S_\varepsilon(0)$ открытый шар радиуса ε с центром в точке 0.

Управляемый объект, описываемый системой (3.5), называется локально нуль-управляемым [82] на отрезке времени $[\tau,T]$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $y_0 \in S_\varepsilon(0)$ объект является управляемым на отрезке $[\tau,T]$ из начального положения y_0 на конечное множество $M = 0$. Это означает, что для любой точки $y_0 \in S_\varepsilon(0)$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее этому управлению решение $y(t)$ системы (3.5) перейдет из точки y_0 в нуль на отрезке времени $[\tau,T]$.

Условия локальной нуль - управляемости системы (3.5) на $[\tau,T]$ можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 3.2.2. *Пусть для системы (3.5) $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t)$. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ - го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение. и на отрезке $[\tau,T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $L(t)$ равен m, где*

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t),...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Тогда система (3.5) локально нуль – управляема на отрезке $[\tau, T]$.

Доказательство. Сформулируем следующие утверждения, необходимые для доказательства теоремы.

Лемма 3.2.1. *Рассмотрим систему*

$$\dot{y} = Ay + B(t)u, \tag{3.6}$$

Система (3.6) полностью управляема на $[\tau, T]$, если на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы $K(t)$ равен m, где

$$K(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t),...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t)).$$

Доказательство. Исследуем управляемость данной системы, используя достаточное условие управляемости Красовского [4]. Для этого составим матрицу $K(t)$, имеющую следующие элементы:

$$L_1(t) = B(t),$$

$$L_k(t) = AL_{k-1}(t) - \frac{dL_{k-1}(t)}{dt}, \quad k = 2,...,m$$

Для системы (3.6) элементы матрицы $K(t)$ будут иметь вид:

$$L_1(t) = B(t),$$

$$L_2(t) = AB(t) - B'(t),$$
$$L_3(t) = A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t),$$
$$\cdots$$
$$L_m(t) = C^0_{m-1}A^{m-2}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t).$$

Итак, пусть на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^*, в которой ранг матрицы

$$K(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t),...,$$
$$C^0_{m-1}A^{m-1}B(t) - C^1_{m-1}A^{m-2}B'(t) + ... + (-1)^{m+1}C^{m-1}_{m-1}A^0B^{(m-1)}(t))$$

равен m, тогда система (3.6) является полностью управляемой на отрезке $[\tau, T]$. Лемма 3.2.1 доказана. □

Лемма 3.2.2. *[9] Пусть система (3.6) полностью управляема, и пусть $e_1, \cdots, e_m$ – точки на осях координат. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, дифференцируемые функции $u^i(t)$, $\|u^i(t)\| < \varepsilon$ и окрестность нуля $S_\delta(0)$ такие, что $\forall e_i \in S_\delta(0)$ функции $u^i(t)$ переводят систему (3.6) из e_i в ноль.*

Доказательство. Поскольку система (3.6) полностью управляема, то по теореме о полной управляемости без ограничений (теорема Красовского [4]), получаем, что строки матрицы $\Psi(t) = Y^{-1}(t)B(t)$ линейно независимы на $[\tau, T]$. Следовательно, существует $\Phi(t)$ непрерывная на $[\tau, T]$, такая что $rangW(\tau, T) = m$, где

$$W(\tau, T) = \int\limits_{\tau}^{T} Y^{-1}(t)B(t)\Phi(t)dt = \int\limits_{\tau}^{T} \Psi(t)\Phi(t)dt$$

Возьмем управление $u(t) = -\Phi(t)W^{-1}(\tau, T)Y^{-1}(\tau)y_0$, переводящее y_0 в ноль на $[\tau, T]$. Тогда

$$u_i(t) = -\Phi(t)W^{-1}(\tau, T)Y^{-1}(\tau)e_i.$$

Оценим

$$\|u_i\| \leqslant \|\Phi\|\|W^{-1}(\tau, T)\|\|Y^{-1}(\tau)\|\|e_i\|.$$

Рассмотрим $\max_{[\tau,T]} \|\Phi\| = k$, тогда

$$\|u_i\| \leqslant k\|W^{-1}(\tau, T)\| \cdot \|Y^{-1}(\tau)\| \cdot \|e_i\| \leqslant k_1\|e_i\|,$$

где

$$k_1 = k\|W^{-1}(\tau, T)\| \cdot \|Y^{-1}(\tau)\|.$$

Имеем

$$\|u_i\| \leqslant k_1\|e_i\|$$

Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{k_1}$, тогда

$$\|u_i\| \leqslant \varepsilon \qquad \|e_i\| \leqslant \delta.$$

Лемма 3.2.2 доказана. □

Рассмотрим систему (3.5) и систему (3.6) в обратном времени. Для этого сделаем замену $\tau = -t$, получим

$$\dot{y} = -f(y) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u, \tag{3.7}$$

$$\dot{y} = -Ay - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u, \tag{3.8}$$

где $A = \frac{\partial f}{\partial y}(0)$.

Известно, что для данной системы (3.5) при сделанных предположениях существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $\|u\| < \varepsilon$ все траектории системы (3.7) с начальным условием $y(\tau) = 0$ продолжаемы на $[\tau, T]$.

Действительно, рассмотрим множество

$$Q_\delta = \{(y,u) | \|y\| < \delta, \|u\| < \delta\}.$$

Учитывая, что $f(y) \in C^1(R^m)$, имеем, по непрерывности, на множестве Q_δ:

$$\max_{y \in Q_\delta} \|\frac{\partial f}{\partial y}\| = M_\delta < \infty$$

Оценим $y(t,\tau,0,u)$. Поскольку $y(t,\tau,0,u)$ является решением системы (3.5), то оно имеет вид:

$$y(t,\tau,0,u) = y(\tau) + \int\limits_\tau^t f(y)dt + \int\limits_\tau^t B(t)udt$$

Далее, используя формулу Тейлора и оценку, полученную выше, имеем:

$$\|y(t)\| \leqslant \int\limits_\tau^t \|f(y)\|dt + \int\limits_\tau^t \|B(t)u\|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\tau^t M_\delta \|y\|dt + \int\limits_\tau^t M_1 \|u\|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\tau^t M\|y\|dt + \int\limits_\tau^t M\|u\|dt,$$

где $M = \max\{M_\delta, M_1\}$. Пусть $t = T$, тогда имеем

$$\|y\| \leqslant \int\limits_\tau^T M\|y\|dt + M\varepsilon.$$

По лемме Гронуолла при соответствующем выборе ε получаем

$$\|y\| \leqslant M\varepsilon e^{|\int_\tau^T Mdt|} \leqslant M\varepsilon e^{MT} < \delta.$$

Таким образом, решение $y(t,\tau,0,u)$ ограничено на отрезке $[\tau, T]$ и, следовательно, продолжаемо на $[\tau, T]$. Таким образом, решения $y(t,\tau,0,u)$ системы (3.7) определены на отрезке $[\tau, T]$ для допустимых управлений u: $\|u\| < \varepsilon$.

По условию теоремы 3.2.2 получаем, что лемма 3.2.1 выполнена и система (3.8) полностью управляема на отрезке $[\tau, T]$. Тогда, по лемме 3.2.2 для системы

(3.8) существуют $\varepsilon > 0$ и $u^i(t)$, $\|u^i(t)\| < \varepsilon$, переводящие систему из нуля на e_i, $\|e_i\| < \delta(\varepsilon)$, принадлежащие осям координат. Кроме того, $u^i(t)$ можно выбрать дифференцируемыми.

Рассмотрим управление $u(t,\xi) = \xi_1 u^1(t) + \cdots + \xi_m u^m(t)$, где $\xi \in R^m$, $\|\xi\| = \max\limits_i |\xi_i| \leqslant 1$. Тогда $\|u\| < \varepsilon$, т.к. $\|u^i(t)\| < \varepsilon$. Применим данное управление $u(t,\xi)$ к системе (3.7). Имеем

$$\dot{y} = -f(y) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u(t,\xi), \tag{3.9}$$

$y(\tau) = 0$ - начальное условие. Решение системы (3.9) имеет вид:

$$y(t,\xi) = y(t,\tau,0,u(t,\xi)).$$

Заметим, что $u(t,0) = 0$ и $y(t,\tau) = 0$ и полученное решение $y(t,\xi)$ определено на $[\tau, T]$.

Покажем, что образы $y(T,\xi)$ покрывают некоторую окрестность начала координат при $\|\xi\| \leqslant 1$, т.е. $x(1,\xi) = y_0$ для любой точки $y_0 \in S_\delta(0)$.

Применим теорему о неявной функции к уравнению $y(T,\xi) = y_0$. Рассмотрим матрицу

$$Z(t,\xi) = \frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}.$$

Докажем, что $Z(T,\xi)$ невырождена. Из теории дифференциальных уравнений, имеем

$$\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial t} = -f(y(t,\xi)) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u(t,\xi),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\partial f(y(t,\xi))}{\partial y}|_0 \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi},$$

т.е.

$$\dot{Z} = -AZ - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))\frac{\partial u(t,\xi)}{\partial \xi},$$

где $\frac{\partial u}{\partial \xi} = (u^1, \cdots, u^m)$.

Пусть $z_1, \cdots, z_m$ – столбцы матрицы $Z(t,\xi)$, тогда

$$\dot{z}_j = -Az_j - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u^j, j = \overline{1,m}.$$

По свойству управления u^j, $z_j(1) = e_j$ и e_j являются линейно независимыми по условию. Таким образом, $det Z(T,\xi) \neq 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, имеем, что если $\|\xi\| \leqslant 1$, то концы траектории системы (3.7) покрывают некоторую окрестность нуля. Таким образом, система (3.5) локально нуль – управляема на $[\tau, T]$. Теорема 3.2.2 доказана. $\square$

Таким образом, при выполении условий теоремы 3.2.2 объект, описываемый системой (3.5), локально нуль – управляем на $[\tau, T]$. Если множество M_1 содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, тогда при выполнении условий теоремы 3.2.2 и в силу локальной управляемости системы (3.5) объект попадает из нуля в множество M_1. При этом мы воспользуемся свойством автономности системы (3.5) и, рассматривая движение объекта "в обратном времени", т.е. рассматривая систему $\dot{y} = -f(y) - B(t)u$, выберем управление таким образом, что соответствующая ему траектория соединит точку нуль с точкой из заданного множества M_1. Таким образом доказана управляемость объекта, описываемого системами (3.1) и (3.2), из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0,T]$.

□

Заметим, что требование локальной управляемости системы является условием, которое не обязано выполняться. Например, система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u, \\ \dot{y} = -y - x^{2n} \end{cases} \tag{3.10}$$

не является локально нуль- управляемой.

Действительно, поскольку система (3.10) является автономной, рассмотрим ее в обратном времени, сделав замену переменных $\tau = -t$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - u, \\ \dot{y} = y + x^{2n}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Если система (3.10) является локально нуль-управляемой, то по определению, существует некоторая окрестность нуля $S_\delta(0)$, для любой точки которой найдется допустимое управление, переводящее систему из этой точки в ноль. Тогда для системы (3.11) найдутся допустимые управления, переводящие систему из нуля в любую точку окрестности $S_\delta(0)$. Проверим это. Рассмотрим решение системы (3.11):

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t e^{t-s} u(s) ds, \\ y(t) = \int_0^t e^{t-s} x^{2n} ds. \end{cases} \tag{3.12}$$

Тогда $y(t) = \int_0^t e^{t-s}x^{2n}ds \geqslant 0$ для любого решения $x(t)$ первого уравнения системы (3.11). Таким образом, получили, что из точки ноль нельзя попасть в любую точку окрестности $S_\delta(0)$, т.е. система (3.11), как и система (3.10) не являются локально нуль -управляемыми.

С другой стороны, локальная управляемость может иметь место в достаточно многих случаях, т.е. требование локальной управляемости не является исключительным условием.

3.3 Пример

Пусть в пространстве $X = \mathbb{R}^3$ переменных $x = (x_1,x_2,x_3)$ движение объекта описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1^2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -15x_1^7 - 15x_1^4x_2 + v, \end{cases} \tag{3.13}$$

где $v \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]$.

Задана начальная точка $x_0 = (1,-2,-1)$ и конечная точка $x_1 = (0,0,0)$. Также в пространстве X задано отображение q, с помощью которого осуществляется переход объекта из пространства X в пространство Y: $q(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2)$, причем $q(0,0,0) = (0,0)$.

В пространстве $Y = \mathbb{R}^2$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1^2 - y_2 + t\sin tu_1, \\ \dot{y}_2(t) = y_2^2 - y_1 + \cos tu_2, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $t \in [1,5]$, $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^2 | u(\cdot) \in L_\infty[1,5]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$, $0 \in int\Omega$.

В пространстве $Y = \mathbb{R}^2$ задано конечное множество $M_1 = (1,1)$.

Задача: Исследовать, является ли объект, описываемый системами (3.13) и (3.14) управляемым из точки x_0 пространства $X = \mathbb{R}^3$ на множество M_1 пространства $Y = \mathbb{R}^2$ на отрезке $[0,5]$.

Решение:

Рассмотрим сначала задачу управляемости из точки $x_0 = (1,-2,-1)$ в точку $x_1 = (0{,}0{,}0)$ за время $T = 1$ в пространстве X:

Система (3.13) является системой треугольного вида и с помощью замены переменных

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_1^3 + x_2, \\ z_3 = 3x_1^5 + x_3 \end{cases} \tag{3.15}$$

приводится к линейной системе:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = v. \end{cases} \tag{3.16}$$

Управление $v(t)$ выберем таким образом, чтобы за время $T = 1$ попасть из точки $z_0 = (1,-1{,}1)$ в точку $z_1 = z(1) = (0{,}0{,}0)$. Т.о. управление $v(t)$ имеет вид:

$$v(t) = -b_0^T e^{-A_0^T t} W_0^{-1} z_0,$$

где W_0^{-1}- матрица обратная к матрице

$$W_0 = \int\limits_0^1 e^{-A_0 \tau} b_0 b_0^T e^{-A_0^T \tau} d\tau.$$

Выбранное управление $v(t)$, переводящее точку $x_0 = (1,-2,-1)$ в точку $x_1 = (0{,}0{,}0)$ в силу системы (3.13), совпадает с управлением, переводящим точку $z_0 = (1,-1{,}1)$ в точку $z_1 = (0{,}0{,}0)$ в силу системы (3.16).

Итак, получаем:

$$W_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_0^{-1} = \begin{pmatrix} 720 & 360 & 60 \\ 360 & 192 & 36 \\ 60 & 36 & 9 \end{pmatrix}$$

и управление $v(t)$ примет вид

$$v(t) = -210t^2 + 204t - 33.$$

Таким образом, траектории системы (3.16), соединяющие точки

$$z_0 = (1, -1, 1) \qquad z_1 = (0, 0, 0),$$

имеют вид:

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2} + \frac{t^2}{2} - t + 1, \\ z_2 = -\frac{35t^4}{2} + 34t^3 - \frac{33t^2}{2} + t - 1, \\ z_3 = -70t^3 + 102t^2 - 33t + 1. \end{cases} \tag{3.17}$$

Тогда, используя замену (3.15) и (3.17) получаем, что траектории системы (3.13) соединяющие точки $x_0 = (1, -2, -1)$ и $x_1 = (0, 0, 0)$, имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2} + \frac{t^2}{2} - t + 1, \\ x_2 = -\frac{35t^4}{2} + 34t^3 - \frac{33t^2}{2} + t - 1 - (-\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2} + \frac{t^2}{2} - t + 1)^3, \\ x_3 = -70t^3 + 102t^2 - 33t + 1 - 3(-\frac{7t^5}{2} + \frac{17t^4}{2} - \frac{11t^3}{2} + \frac{t^2}{2} - t + 1)^5. \end{cases} \tag{3.18}$$

Т.о. управление $v(t) = -210t^2 + 204t - 33$ перводит объект, описываемый системой (3.13) по траекториям (3.18) из точки $x_0 = (1, -2, -1)$ в точку $x_1 = (0, 0, 0)$.

Далее осуществим переход в постранство $Y = R^2$ и исследуем локальную нуль-управляемость системы (3.14).

Возьмем в качестве точки t^* точку $t = \frac{\pi}{2}$. Тогда ранг матрицы

$$L(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & -1 & -2 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} + 1 & 2 \end{pmatrix}$$

равен двум и по теореме 3.2.2 система (3.14) является локально нуль - управляемой на отрезке [1, 5].

В силу того, что конечное множество M_1 имеет непустое пересечение с окрестностью локальной нуль - управляемости и учитывая автономность системы (3.14), рассмотрев движение объекта "в обратном времени", найдется допустимое управление, что соответствующая ему траектория, соединит точку нуль и множество M_1.

Глава 4. Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой

Данная глава посвящена построению оптимальных методов восстановления решения системы линейных дифференциальных однородных уравнений по исходной информации, заданной со случайной ошибкой. Следуя постановке, предложенной в работе [60], используется ряд идей из этой работы для доказательства общего результата в конечномерном случае. Рассмотрены различные варианты задания исходной информации: задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$. Также рассматривается задача, в которой решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t = T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$.

Общий результат применяется также к задаче о восстановлении k-ой производной тригонометрического полинома по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой.

В рассматриваемых задачах мы не ограничиваемся лишь нормальным распределением случайной величины, а рассматриваем произвольные распределения случайного вектора с фиксированным математическим ожиданием и фиксированной оценкой для дисперсии. Как и в задачах с детерминированной ошибкой здесь обнаруживаются такие эффекты, как линейность оптимального метода и возможность использовать не всю доступную для измерений информацию.

Результаты данной главы опубликованы соискателем в следующих научных публикациях:

- Максимова И.С., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой, Математический сборник, 2025,—Т. 216,—№4,—С. 67–89.

4.1 Постановка задачи об оптимальном восстановлении решения системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$$

— собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям μ_j, $j = 1,\dots,n$. Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0. Требуется восстановить решение в момент $\tau > 0$.

Перейдем к точной постановке задачи. Положим для $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \nu_j x_j^2 \leqslant 1. \right\}, \quad Tx = (e^{\mu_1\tau}x_1,\dots,e^{\mu_n\tau}x_n), \quad Ix = (x_1,\dots,x_n).$$

Зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{\, y = (y_1, \ldots, y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix,\, \mathbb{D}(y_j) \leqslant \delta^2,\, j = 1, \ldots, n \,\}.$$

Пространство $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется величина

$$e(T,W,I,\delta,\varphi) = \left(\sup_{x \in W,\ y \in Y_\delta(x)} \mathbb{M}\left(\|Tx - \varphi(y)\|^2_{\mathbb{R}^n} \right) \right)^{1/2}$$

(рассматриваются только те методы, для которых эта величина определена). Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T,W,I,\delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} e(T,W,I,\delta,\varphi)$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым оптимальным.

Для решения сформулированной задачи мы в пункте 4.2. рассмотрим более общую задачу, решим ее и затем применим полученный результат к поставленной исходной задаче восстановления решения системы дифференциальных уравнений в пункте 4.3.

4.2 Общий результат

Пусть X — линейное пространство, Z — линейное нормированное пространство и $T\colon X \to Z$ — линейный оператор. Требуется восстановить значения оператора T на некотором множестве (классе) $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I\colon X \to \mathbb{R}^n$, заданным со случайной ошибкой. Более точно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{\, y = (y_1, \ldots, y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix,\, \mathbb{D}(y_j) \leqslant \delta^2,\, j = 1, \ldots, n \,\}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства Z, принимаемый за приближение к значению Tx. Погрешностью метода восстановления $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to Z$ называется величина

$$e(T,W,I,\delta,\varphi) = \left(\sup_{x\in W,\ y\in Y_\delta(x)} \mathbb{M}\left(\|Tx-\varphi(y)\|_Z^2\right)\right)^{1/2}$$

(рассматриваются только те методы, для которых эта величина определена). Задача состоит в нахождении погрешности оптимального восстановления

$$E(T,W,I,\delta) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^n\to Z} e(T,W,I,\delta,\varphi) \tag{4.2}$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым оптимальным.

Положим

$$W = \left\{ x\in\mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n \nu_j |x_j|^2 \leqslant 1 \right\},$$

где $\nu_j > 0$, $j = 1,\ldots,n$. Определим линейные операторы $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $I\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом

$$Tx = (\mu_1x_1,\ldots,\mu_nx_n), \quad Ix = (x_1,\ldots,x_n),$$

$|\mu_j| > 0$, $j = 1,\ldots,n$.

Введем обозначения

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, \quad j=1,\ldots,n, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^j \nu_k\left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k}-1\right)\right)^{1/2}, \quad j=1,\ldots n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$. Нетрудно убедиться, что $0 = \xi_1 \leqslant \ldots \leqslant \xi_n$.

Теорема 4.2.1. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некотором $1 \leqslant s \leqslant n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n,+\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta\left(\sum_{k=1}^s |\mu_k|^2\left(1-\frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2\gamma_1\displaystyle\sum_{k=1}^s\frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1+\delta^2\displaystyle\sum_{k=1}^s\nu_k}, \tag{4.3}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right) \mu_k y_k e_k,$$

где $\{e_k\}$ *— стандартный базис в* $\mathbb{R}^n$*, является оптимальным.*

Доказательство. 1. Оценка снизу. Зафиксируем элемент $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in W$ такой, что

$$\tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_n > 0.$$

Введем множество

$$B = \{\, x \in l_2^n : \; x_j = \pm\tau_j, \, j = 1, \ldots, n \,\}.$$

Очевидно, что $B \subset W$. Положим

$$p_j = \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В силу условий на монотонность τ_j имеем

$$0 < p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_n < 1.$$

Произвольный элемент $x \in B$ записывается в виде

$$x = \sum_{j=1}^{n} s_j(x) \tau_j e_j,$$

где $s_j(x) \in \{-1, 1\}$. Зададим распределение $\eta(x)$ для каждого $x \in B$

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } p_1, \\ \dfrac{s_1(x)\tau_1}{1-p_1} e_1 & \text{с вероятностью } p_2 - p_1, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j} e_j, & \text{с вероятностью } p_3 - p_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j} e_j, & \text{с вероятностью } p_n - p_{n-1}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j} e_j, & \text{с вероятностью } 1 - p_n. \end{cases}$$

Таким образом, для координат вектора $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x))$ имеем следующие распределения:

$$\eta_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{с вероятностью } p_j, \\ \dfrac{s_j(x)\tau_j}{1-p_j}, & \text{с вероятностью } 1-p_j, \end{cases} \qquad j = 0,1,\ldots,n.$$

Несложно убедиться, что $\mathbb{M}(\eta_j(x)) = x_j$, $j = 1,\ldots,n$. Кроме того,

$$\mathbb{D}(\eta_j(x)) = (1-p_j)\frac{\tau_j^2}{(1-p_j)^2} - \tau_j^2 = \delta^2, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Следовательно, $\eta(x) \in Y_\delta(x)$ для всех $x \in B$.

Пусть φ — произвольный метод восстановления. Учитывая, что число элементов в множестве B равно 2^n, получаем

$$\begin{aligned} e^2(T,W,I,\delta,\varphi) &\geqslant \sup_{x\in B}\mathbb{M}\|Tx - \varphi(\eta(x))\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &= \sup_{x\in B}\left(\sum_{j=1}^{n+1}(p_j - p_{j-1})\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{\mathbb{R}^n}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2^n}\sum_{x\in B}\left(\sum_{j=1}^{n+1}(p_j - p_{j-1})\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{\mathbb{R}^n}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{n+1}(p_j - p_{j-1})\sum_{x\in B}\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{\mathbb{R}^n}; \end{aligned} \tag{4.4}$$

здесь $p_0 = 0$, а $p_{n+1} = 1$. Положим

$$B_{s_1,\ldots,s_{j-1}} = \{\, x \in B : s_1(x) = s_1, \ldots, s_{j-1}(x) = s_{j-1} \,\},$$

$j = 1,\ldots,n+1$ (при $j = 1$ это множество совпадает с B). Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{p_j - p_{j-1}}{2^n}\sum_{x\in B}\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k(x)\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{\mathbb{R}^n} \\ &\qquad = \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n}\sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}}\ \sum_{x\in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}}\left\|Tx - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{s_k\tau_k}{1-p_k}e_k\right)\right\|^2_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Если $x \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}$, то

$$x = \sum_{k=1}^{j-1}s_k\tau_k e_k + z(x), \quad z(x) = \sum_{k=j}^{n}s_k(x)\tau_k e_k.$$

Причем с каждым элементом

$$\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k + z(x) \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}$$

в множестве $B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}$ содержится и элемент

$$\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k - z(x).$$

Таким образом,

$$\frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}} \left\| Tx - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k} e_k\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 =$$

$$= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}} \left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k + z(x)\right) - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k} e_k\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 =$$

$$= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}} \left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k\right) + Tz(x) - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k} e_k\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 =$$

$$= \frac{p_j - p_{j-1}}{2^{n+1}} \sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}} \left(\left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k\right) + Tz(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k} e_k\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \left\| T\left(\sum_{k=1}^{j-1} s_k \tau_k e_k\right) - Tz(x) - \varphi\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{s_k \tau_k}{1-p_k} e_k\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{s_1,\ldots,s_{j-1}} \sum_{x \in B_{s_1,\ldots,s_{j-1}}} \|Tz(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \frac{p_j - p_{j-1}}{2^n} \sum_{x \in B} \|Tz(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 =$$

$$= (p_j - p_{j-1}) \sum_{k=j}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2.$$

Подставляя эту оценку в (4.4), получаем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \geqslant \sum_{j=1}^{n+1} (p_j - p_{j-1}) \sum_{k=j}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(p_j \sum_{k=j}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2 - p_j \sum_{k=j+1}^{n} |\mu_k|^2 \tau_k^2 \right) = \sum_{j=1}^{n} p_j |\mu_j|^2 \tau_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2.$$

В силу произвольности метода φ имеет место следующая оценка

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_n > 0}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2. \tag{4.5}$$

Рассмотрим вектор $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k, 0, \ldots, 0) \in W$ такой, что $\tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_k > 0$, $1 \leqslant k < n$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ положим $\tau_\varepsilon = (\tau_1(\varepsilon), \ldots, \tau_n(\varepsilon))$, где

$$\tau_j(\varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{\tau_j^2 - \varepsilon}, & 1 \leqslant j \leqslant k, \\ C\sqrt{\varepsilon}, & k+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}$$

а

$$C = \left(\frac{\sum_{j=1}^{k} \nu_j}{\sum_{j=k+1}^{n} \nu_j} \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \nu_j \tau_j^2(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \tau_j^2 - \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \nu_j + C^2 \varepsilon \sum_{j=k+1}^{n} \nu_j = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \tau_j^2 \leqslant 1.$$

Тем самым $\tau_\varepsilon \in W$. При $\varepsilon < \tau_k^2/(1+C^2)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\tau_k^2 - \varepsilon} > C\sqrt{\varepsilon}.$$

Следовательно, при таких ε

$$\tau_1(\varepsilon) \geqslant \ldots \geqslant \tau_n(\varepsilon) > 0.$$

Из (4.5) вытекает, что

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2(\varepsilon)} |\mu_j|^2 \tau_j^2(\varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2.$$

Таким образом,

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sup_{\substack{\tau \in W \\ \tau_1 \geqslant \ldots \geqslant \tau_n \geqslant 0}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta^2 + \tau_j^2} |\mu_j|^2 \tau_j^2. \tag{4.6}$$

2. Оценка сверху. Найдем погрешность методов, имеющих вид

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j e_j.$$

Положим $z(x)=y(x)-Ix$. Тогда $\mathbb{M}(z(x))=0$, $\mathbb{D}(z_j(x))\leqslant\delta^2$, $j=1,\ldots,n$. Имеем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W\\ y(x)\in Y_\delta(x)}}\mathbb{M}\left(\|Tx-\varphi(y(x))\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)=$$
$$=\sup_{\substack{x\in W\\ y(x)\in Y_\delta(x)}}\mathbb{M}\left(\|Tx-\varphi(Ix)-\varphi(z(x))\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)=\sup_{\substack{x\in W\\ y(x)\in Y_\delta(x)}}\Big(\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{\mathbb{R}^n}+$$
$$+\mathbb{M}(\|\varphi(z(x))\|^2_{\mathbb{R}^n})-2\mathbb{M}(\varphi(z(x)),Tx-\varphi(Ix))\Big)\,;$$

здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Из вида φ следует, что

$$\mathbb{M}(\varphi(z(x)),Tx-\varphi(Ix))=\mathbb{M}\left(\sum_{j=1}^n\alpha_jz_j(x)e_j,Tx-\varphi(Ix)\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^n(e_j,Tx-\varphi(Ix))\alpha_j\mathbb{M}(z_j(x))=0.$$

Так как

$$\mathbb{M}(\|\varphi(z(x))\|^2_{\mathbb{R}^n})=\mathbb{M}\left(\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2|z_j(x)|^2\right)=\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2\mathbb{D}(z_j(x)),$$

то

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W\\ y(x)\in Y_\delta(x)}}\left(\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{\mathbb{R}^n}+\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2\mathbb{D}(z_j(x))\right)=$$
$$=\sup_{x\in W}\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{\mathbb{R}^n}+\delta^2\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{\mathbb{R}^n}\to\max\,,\quad x\in W.$$

Перепишем эту задачу в виде

$$\sum_{j=1}^n|\mu_j-\alpha_j|^2|x_j|^2\to\max\,,\quad\sum_{j=1}^n\nu_j|x_j|^2\leqslant 1.$$

Из неравенства

$$\sum_{j=1}^n|\mu_j-\alpha_j|^2|x_j|^2=\sum_{j=1}^n\frac{|\mu_j-\alpha_j|^2}{\nu_j}\nu_j|x_j|^2\leqslant$$
$$\leqslant\max\left\{\frac{|\mu_1-\alpha_1|^2}{\nu_1},\ldots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}\sum_{j=1}^n\nu_j|x_j|^2$$

получаем

$$\sup_{x\in W}\|Tx-\varphi(Ix)\|^2_{\mathbb{R}^n}\leqslant\max\left\{\frac{|\mu_1-\alpha_1|^2}{\nu_1},\ldots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}.$$

Таким образом,

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\max\left\{\frac{|\mu_1-\alpha_1|^2}{\nu_1},\ldots,\frac{|\mu_n-\alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}+\delta^2\sum_{j=1}^n|\alpha_j|^2.$$

Положим

$$c_j=\frac{\alpha_j}{\mu_j},\quad j=1,\ldots,n.$$

Тогда для погрешности метода φ имеем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\max\left\{\frac{|1-c_1|^2}{\gamma_1^2},\ldots,\frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\}+\delta^2\sum_{j=1}^n|\mu_j|^2|c_j|^2.$$

2.1. Пусть $1/\delta\in(\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некотором $1\leqslant s\leqslant n-1$. Тогда нетрудно показать, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}}\leqslant\frac{\delta^2\sum\limits_{k=1}^s\dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1+\delta^2\sum\limits_{k=1}^s\nu_k}<\frac{1}{\gamma_s}.$$

Если определить c_1 равенством (4.3), то

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}}\leqslant\frac{1-c_1}{\gamma_1}<\frac{1}{\gamma_s}.$$

Пусть

$$c_k=1-\gamma_k\frac{1-c_1}{\gamma_1},\quad k=2,\ldots,s,\quad c_k=0,\quad k=s+1,\ldots,n.$$

Имеем

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2},\quad k=2,\ldots,s.$$

При $k\geqslant s+1$

$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{1}{\gamma_k^2}\leqslant\frac{1}{\gamma_{s+1}^2}\leqslant\frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2}.$$

Поэтому

$$\max\left\{\frac{|1-c_1|^2}{\gamma_1^2},\ldots,\frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\}=\frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2}.\tag{4.7}$$

Следовательно,

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k^2 = \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} +$$

$$+ \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 ((1-c_k)^2 - (1-c_k) + c_k) = \frac{(1-c_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k^2}{\gamma_1^2}(1-c_1)^2 -$$

$$- \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \frac{\gamma_k}{\gamma_1}(1-c_1) + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k = \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k +$$

$$+ \frac{1-c_1}{\gamma_1^2}\left(1 - c_1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k (1-c_1) - \delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}\right) = \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k +$$

$$+ \frac{1-c_1}{\gamma_1^2}\left((1-c_1)\left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k\right) - \delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}\right) = \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k. \quad (4.8)$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau} \in \mathbb{R}^n$, имеющий вид

$$\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k} - 1\right), \quad k = 1, \ldots, s, \quad \widehat{\tau}_k = 0, \quad k = s+1, \ldots, n.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k \widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k} - 1\right) = \frac{\delta^2 \gamma_1}{1-c_1} \sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k =$$

$$= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k\right) - \delta^2 \sum_{k=1}^{s} \nu_k = 1.$$

Таким образом, $\widehat{\tau} \in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ в оценку (4.6), получаем

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta^2 |\mu_k|^2 \widehat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \widehat{\tau}_k^2} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta^4 |\mu_k|^2 \left(\dfrac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k} - 1\right)}{\delta^2 \dfrac{\gamma_1}{(1-c_1)\gamma_k}} =$$

$$= \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{(1-c_1)\gamma_k}{\gamma_1}\right) = \delta^2 \sum_{k=1}^{s} |\mu_k|^2 c_k \geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

2.2. Пусть теперь $1/\delta > \xi_n$. Тогда

$$\frac{\delta^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \nu_k} < \frac{1}{\gamma_n}.$$

Положим
$$c_1 = 1 - \gamma_1 \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k}.$$
Тогда
$$\frac{1 - c_1}{\gamma_1} < \frac{1}{\gamma_n}.$$
Пусть
$$c_k = 1 - \gamma_k \frac{1 - c_1}{\gamma_1}, \quad k = 2, \dots, n.$$
Имеем
$$\frac{(1 - c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1 - c_1)^2}{\gamma_1^2}, \quad k = 2, \dots, n.$$
Тем самым, как и в предыдущем случае, справедливо равенство (4.7). Повторяя, выкладки (4.8) для $s = n$, получаем
$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 c_k.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau} \in \mathbb{R}^n$, имеющий вид
$$\widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 1, \dots, n.$$
Имеем
$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k \widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k \left(\frac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k} - 1 \right) = \frac{\delta^2 \gamma_1}{1 - c_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k =$$
$$= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k \right) - \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k = 1.$$
Таким образом, $\widehat{\tau} \in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ в оценку (4.6), получаем
$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^2 |\mu_k|^2 \widehat{\tau}_k^2}{\delta^2 + \widehat{\tau}_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^4 |\mu_k|^2 \left(\dfrac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k} - 1 \right)}{\delta^2 \dfrac{\gamma_1}{(1 - c_1)\gamma_k}} =$$
$$= \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{(1 - c_1)\gamma_k}{\gamma_1} \right) = \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 c_k \geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$
Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

$\square$

4.3 Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений

Здесь дается решение задачи о восстановлении для начальной точки в эллипсоиде, затем рассматривается частный случай шара. Потом задача о восстановлении по коэффициентам в момент времени T и для конечной точки в эллипсоиде. Затем приводится частный случай шара.

4.3.1 Восстановление решений линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой в начальный момент времени

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.9}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ и $A = (a_{ij}), a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n$$

— собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\mu_j, j = 1,...,n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.9) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0. Требуется восстановить решение в момент τ, $\tau > 0$.

Положим для $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j^2 \leqslant 1 \right\}, \quad Tx = (e^{\mu_1\tau}x_1,\ldots,e^{\mu_n\tau}x_n), \quad Ix = (x_1,\ldots,x_n).$$

Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Таким образом, поставленная задача восстановления сводится к задаче, рассмотренной выше. Применим теорему 4.2.1.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{\mu_j\tau}}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)\right)^{1/2}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Следствие 4.3.1. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \leqslant s \leqslant n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta\left(\sum_{k=1}^{s} e^{2\mu_k\tau}\left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2\gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{4.10}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right) e^{\mu_k\tau} y_k e_k,$$

является оптимальным.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m$$

— собственные числа матрицы A и r_k — кратность собственного числа λ_k, $k = 1,\ldots,m$. Обозначим через $\{e_{kj}\}_{j=1}^{r_k}$ ортонормированную систему векторов, соответствующую собственному значению λ_k. Тогда система векторов

$$e_{11},\ldots,e_{1r_1},\ldots,e_{m1},\ldots,e_{mr_m}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Тогда решение задачи (4.9) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Теперь предположим, что в начальный момент времени точка x_0 находится в некотором шаре радиуса R:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} x_{kj}^2 \leqslant R^2.$$

Тогда задача восстановления решения в момент времени τ, $\tau > 0$ сводится к предыдущей для

$$W = \left\{ x \in l_2^n : \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} R^{-2} x_{kj}^2 \leqslant 1 \right\},$$

$$Tx = (e^{\lambda_1 \tau} x_{11}, \ldots, e^{\lambda_1 \tau} x_{1r_1}, \ldots, e^{\lambda_m \tau} x_{m1}, \ldots, e^{\lambda_m \tau} x_{mr_m}),$$

$$Ix = (x_{11}, \ldots, x_{1r_1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mr_m}).$$

Положим

$$\xi_k = R^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k} r_j \left(e^{(\lambda_j - \lambda_k)\tau} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Следствие 4.3.2. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \leqslant s \leqslant m-1$ или $1/\delta \in (\xi_m, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = m$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} e^{2\lambda_k \tau} r_k \left(1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_k)\tau} (1 - c_1) \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 R^{-2} e^{-\lambda_1 \tau} \sum\limits_{k=1}^{s} r_k e^{\lambda_k \tau}}{1 + \delta^2 R^{-2} \sum\limits_{k=1}^{s} r_k}, \tag{4.11}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left(e^{\lambda_k \tau} - e^{\lambda_1 \tau}(1 - c_1)\right) \sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} e_{kj},$$

является оптимальным.

4.3.2 Восстановление решений линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой в момент времени T_1

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.12}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ и $A = (a_{ij}), a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$$

— собственные числа матрицы A. Обозначим через $\{e_j\}_{j=1}^n$ ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\lambda_j, j = 1,...,n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.12) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} x_j e_j.$$

Кроме того, считается, что в начальный момент времени x_0 принадлежит некоторому эллипсоиду:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} b_j x_j^2 \leqslant 1. \right\}$$

Требуется восстановить решение в момент τ, $0 < \tau < T_1$. Если через x_j обозначить координаты решения в момент времени T_1, то условие принадлежности точки x_0 элиипсоиду будет означать, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_j e^{-2\lambda_j T_1} x_j^2 \leqslant 1.$$

Таким образом, поставленная задача восстановления сводится к задаче, рассмотренной выше, для

$$W = \left\{ x \in l_2^n : \sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j^2 \leqslant 1 \right\},$$

где $\nu_j = b_j e^{-2\lambda_j T_1}, j = 1,...,n$.

Положим для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$Tx = (e^{\lambda_1 (T_1 - \tau)} x_1, \ldots, e^{\lambda_n (T_1 - \tau)} x_n),$$

$$Ix = (x_1, \ldots, x_n).$$

Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Для решения поставленной задачи восстановления применим теорему 4.2.1.

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{e^{-\lambda_j (T_1 - \tau)}}, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$.

Следствие 4.3.3. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \leqslant s \leqslant n-1$ или $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = n$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} e^{-2\lambda_k (T_1 - \tau)} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1} (1 - c_1) \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \nu_k}, \tag{4.13}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left((1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_1}(1 - c_1) \right) e^{-\lambda_k(T_1-\tau)} y_k e_k,$$

является оптимальным.

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.14}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ и $A = (a_{ij}),\quad a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m$$

— собственные числа матрицы A и r_k — кратность собственного числа λ_k, $k = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\{e_{kj}\}_{j=1}^{r_k}$ ортонормированную систему векторов, соответствующую собственному значению λ_k. Тогда система векторов

$$e_{11}, \ldots, e_{1r_1}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mr_m}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{R}^n$.

Пусть

$$x_0 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Тогда решение задачи (4.14) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} e_{kj}.$$

Предположим, что решение задачи (4.14) известно с некоторыми случайными погрешностями в момент времени $t = T_1$. Как и в общей постановке, всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(x)$ элемент из пространства $\mathbb{R}^n$, принимаемый за приближение к значению Tx. Кроме того, считается, что в начальный момент времени $\|x_0\| \leqslant R$ ($\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$). Требуется восстановить решение в момент τ, $0 < \tau < T_1$. Если через x_{kj} обозначить координаты решения в момент времени T, то условие

$\|x_0\| \leqslant R$ будет означать, что

$$\sum_{k=1}^{m} e^{-2\lambda_k T_1} \sum_{j=1}^{r_k} x_{kj}^2 \leqslant R^2.$$

Таким образом, поставленная задача восстановления сводится к задаче, рассмотренной выше, для

$$W = \left\{ x \in l_2^n : \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_k} \nu_{kj} x_{kj}^2 \leqslant 1 \right\},$$

где $\nu_k = \nu_{kj} = R^{-2} e^{-2\lambda_k T_1}$, $k = 1, \ldots, m$,

$$Tx = (e^{-\lambda_1 (T_1 - \tau)} x_{11}, \ldots, e^{-\lambda_1 (T_1 - \tau)} x_{1 r_1}, \ldots, e^{-\lambda_m (T_1 - \tau)} x_{m1}, \ldots, e^{-\lambda_m (T_1 - \tau)} x_{m r_m}),$$

$$Ix = (x_{11}, \ldots, x_{1 r_1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{m r_m}).$$

Положим

$$\xi_k = R^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k} r_j e^{-2\lambda_j T_1} \left(e^{(\lambda_j - \lambda_k)\tau} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Следствие 4.3.4. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некоторых $1 \leqslant s \leqslant m-1$ или $1/\delta \in (\xi_m, +\infty)$ (в этом случае считаем $s = m$). Тогда*

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^{s} r_k e^{-2\lambda_k (T_1 - \tau)} \left(1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_k)\tau} (1 - c_1) \right) \right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 R^{-2} e^{-\lambda_1 \tau} \sum_{k=1}^{s} r_k e^{(-2T_1 + \tau)\lambda_k}}{1 + \delta^2 R^{-2} \sum_{k=1}^{s} r_k e^{-2\lambda_k T_1}}, \tag{4.15}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{s} \left(e^{-\lambda_k (T_1 - \tau)} - e^{\lambda_1 \tau - \lambda_k T_1} (1 - c_1) \right) \sum_{j=1}^{r_k} y_{kj} e_{kj},$$

является оптимальным.

4.4 Восстановление тригонометрических полиномов

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ — множество тригонометрических полиномов
$$p_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jt + b_j \sin jt). \tag{4.16}$$
Положим
$$\mathcal{T}_n^r = \{\, p_n(\cdot) \in \mathcal{T}_n : \|p_n^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1, r \geqslant 1\},$$
где $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами, а
$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Рассматривается задача о восстановлении k-ой производной полинома из множества $\mathcal{T}_n^r$ по его коэффициентам, известным со случайной ошибкой, при $0 \leqslant k < r$. Сведем эту задачу к общей задаче (4.2). Множество $\mathcal{T}_n^r$ представляет из себя множество полиномов (4.16), для которых
$$\sum_{j=1}^{n} j^{2r}(a_j^2 + b_j^2) \leqslant 1.$$
Поэтому, положив
$$x = (a_0,a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n), \quad W = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \sum_{j=1}^{n} j^{2r}(a_j^2 + b_j^2) \leqslant 1 \right\},$$
$$Ix = x, \quad Tx = \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\chi_k, a_1, b_1, \ldots, n^k a_n, n^k b_n\right), \quad \chi_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \geqslant 1, \end{cases}$$
мы приходим к задаче (4.2). Надо отметить, что значения оператора T представляют из себя коэффициенты разложения по ортонормированному базису
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(t + \frac{\pi k}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi k}{2}\right), \ldots, \cos\left(nt + \frac{\pi k}{2}\right), \sin\left(nt + \frac{\pi k}{2}\right)\right).$$

К поставленной задаче нельзя применить теорему 4.2.1, так как здесь $\nu_1 = 0$. В связи с этим приходится применять модифицированный вариант этой теоремы. Рассмотрим множество W и оператор T для случая, когда $\nu_1 = 0$, а $\mu_1 \geqslant 0$. Введем обозначения
$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, \quad j = 2,\ldots,n, \quad \xi_j = \left(\sum_{k=2}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)\right)^{1/2}, \quad j = 2,\ldots n.$$

Будем считать, что $\gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$.

Теорема 4.4.1. *Пусть* $1/\delta \in (\xi_s,\xi_{s+1}]$ *при некотором* $2 \leqslant s \leqslant n-1$ *или* $1/\delta \in (\xi_n, +\infty)$ *(в этом случае считаем* $s = n$*). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta\left(|\mu_1|^2 + \sum_{k=2}^{s} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_2)}{\gamma_2}\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_2 = 1 - \frac{\delta^2\gamma_2 \sum\limits_{k=2}^{s} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=2}^{s} \nu_k}, \tag{4.17}$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_1 y_1 e_1 + \sum_{k=2}^{s} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_2)}{\gamma_2}\right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным.

Доказательство. Те же рассуждения, которые использовались при оценке снизу при доказательстве теоремы 4.2.1, приводят к неравенству (4.6).

При оценке сверху погрешности методов, имеющих вид

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j e_j,$$

снова получаем равенство

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) = \sup_{x\in W} \|Tx - \varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} + \delta^2 \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Но экстремальная задача

$$\|Tx - \varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} \to \max\,, \quad x \in W$$

в силу того, что $\nu_1 = 0$ переписывается теперь в виде

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu_j - \alpha_j|^2 |x_j|^2 \to \max\,, \quad \sum_{j=2}^{n} \nu_j |x_j|^2 \leqslant 1.$$

При $\alpha_1 \neq \mu_1$ значение задачи равно ∞. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\alpha_1 = \mu_1$. Из неравенства

$$\sum_{j=2}^{n} |\mu_j - \alpha_j|^2 |x_j|^2 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|\mu_j - \alpha_j|^2}{\nu_j} \nu_j |x_j|^2$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|\mu_2 - \alpha_2|^2}{\nu_2}, \ldots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}\right\} \sum_{j=2}^{n} \nu_j |x_j|^2$$

получаем

$$\sup_{x \in W} \|Tx - \varphi(Ix)\|^2_{l_2^n} \leqslant \max\left\{\frac{|\mu_2 - \alpha_2|^2}{\nu_1}, \ldots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}\right\}.$$

Таким образом,

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \max\left\{\frac{|\mu_2 - \alpha_2|^2}{\nu_2}, \ldots, \frac{|\mu_n - \alpha_n|^2}{\nu_n}\right\} + \delta^2 \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2.$$

Положим

$$c_j = \frac{\alpha_j}{\mu_j}, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Тогда для погрешность метода φ имеем

$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi) \leqslant \max\left\{\frac{|1 - c_2|^2}{\gamma_1^2}, \ldots, \frac{|1 - c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\} + \delta^2 |\mu_1|^2 + \delta^2 \sum_{j=2}^{n} |\mu_j|^2 |c_j|^2.$$

Пусть $1/\delta \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некотором $2 \leqslant s \leqslant n-1$. Тогда нетрудно показать, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}} \leqslant \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=2}^{s} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=2}^{s} \nu_k} < \frac{1}{\gamma_s}.$$

Если определить c_2 равенством (4.17), то

$$\frac{1}{\gamma_{s+1}} \leqslant \frac{1 - c_2}{\gamma_2} < \frac{1}{\gamma_s}.$$

Пусть

$$c_k = 1 - \gamma_k \frac{1 - c_2}{\gamma_2}, \quad k = 3, \ldots, s, \quad c_k = 0, \quad k = s+1, \ldots, n.$$

Имеем
$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2},\quad k=3,\dots,s.$$
При $k\geqslant s+1$
$$\frac{(1-c_k)^2}{\gamma_k^2}=\frac{1}{\gamma_k^2}\leqslant\frac{1}{\gamma_{s+1}^2}\leqslant\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2}.$$
Поэтому
$$\max\left\{\frac{|1-c_2|^2}{\gamma_2^2},\dots,\frac{|1-c_n|^2}{\gamma_n^2}\right\}=\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2}. \tag{4.18}$$
Следовательно,
$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\frac{(1-c_2)^2}{\gamma_2^2}+\delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{k=2}^{s}|\mu_k|^2c_k^2.$$
Используя преобразования, аналогичные (4.8), получаем
$$e^2(T,W,I,\delta,\varphi)\leqslant\delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{k=2}^{s}|\mu_k|^2c_k.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau}\in l_2^n$, имеющий вид
$$\widehat{\tau}_1=\tau_1,\quad \widehat{\tau}_k^2=\delta^2\left(\frac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}-1\right),\quad k=2,\dots,s,\quad \widehat{\tau}_k=0,\quad k=s+1,\dots,n.$$
Имеем
$$\sum_{k=2}^{n}\nu_k\widehat{\tau}_k^2=\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k\left(\frac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}-1\right)=\frac{\delta^2\gamma_2}{1-c_2}\sum_{k=2}^{s}\frac{\nu_k}{\gamma_k}-\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k=$$
$$=\left(1+\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k\right)-\delta^2\sum_{k=2}^{s}\nu_k=1.$$
Таким образом, $\widehat{\tau}\in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ (при $\tau_1\geqslant\widehat{\tau}_2$) в оценку (4.6), получаем
$$E^2(T,W,I,\delta)\geqslant\sum_{k=1}^{s}\frac{\delta^2|\mu_k|^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2}=\frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2}+\sum_{k=2}^{s}\frac{\delta^4|\mu_k|^2\left(\dfrac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}-1\right)}{\delta^2\dfrac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}}=$$
$$=\frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2}+\delta^2\sum_{k=2}^{s}|\mu_k|^2\left(1-\frac{(1-c_2)\gamma_k}{\gamma_2}\right)=\frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2}+\delta^2\sum_{k=1}^{s}|\mu_k|^2c_k.$$
Устремляя τ_1 к бесконечности, получаем
$$E^2(T,W,I,\delta)\geqslant\delta^2|\mu_1|^2+\delta^2\sum_{k=1}^{s}|\mu_k|^2c_k\geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным.

Пусть теперь $1/\delta > \xi_n$. Тогда

$$\frac{\delta^2 \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=2}^{n} \nu_k} < \frac{1}{\gamma_n}.$$

Положим

$$c_2 = 1 - \gamma_2 \frac{\delta^2 \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=2}^{n} \nu_k}.$$

Тогда

$$\frac{1 - c_2}{\gamma_2} < \frac{1}{\gamma_n}.$$

Пусть

$$c_k = 1 - \gamma_k \frac{1 - c_2}{\gamma_2}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Имеем

$$\frac{(1 - c_k)^2}{\gamma_k^2} = \frac{(1 - c_2)^2}{\gamma_2^2}, \quad k = 3, \ldots, n.$$

Тем самым, как и в предыдущем случае, справедливо равенство (4.18). Используя преобразования, аналогичные (4.8) для $s = n$, получаем

$$e^2(T, W, I, \delta, \varphi) \leqslant \delta^2 |\mu_1|^2 + \delta^2 \sum_{k=2}^{n} |\mu_k|^2 c_k.$$

Рассмотрим вектор $\widehat{\tau} \in l_2^n$, имеющий вид

$$\widehat{\tau}_1 = \tau_1, \quad \widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \left(\frac{\gamma_2}{(1 - c_2)\gamma_k} - 1 \right), \quad k = 2, \ldots, n.$$

Имеем

$$\sum_{k=2}^{n} \nu_k \widehat{\tau}_k^2 = \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k \left(\frac{\gamma_2}{(1 - c_2)\gamma_k} - 1 \right) = \frac{\delta^2 \gamma_2}{1 - c_2} \sum_{k=2}^{n} \frac{\nu_k}{\gamma_k} - \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k$$
$$= \left(1 + \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k \right) - \delta^2 \sum_{k=2}^{n} \nu_k = 1.$$

Таким образом, $\widehat{\tau} \in W$. Подставляя $\widehat{\tau}$ (при $\tau_1 \geqslant \widehat{\tau}_2$) в оценку (4.6), получаем

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^2|\mu_k|^2\widehat{\tau}_k^2}{\delta^2+\widehat{\tau}_k^2} = \frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\delta^4|\mu_k|^2\left(\dfrac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}-1\right)}{\delta^2\dfrac{\gamma_2}{(1-c_2)\gamma_k}}$$
$$= \frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2} + \delta^2\sum_{k=2}^{n}|\mu_k|^2\left(1-\frac{(1-c_2)\gamma_k}{\gamma_2}\right) = \frac{\delta^2|\mu_1|^2\tau_1^2}{\delta^2+\tau_1^2} + \delta^2\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^2c_k.$$

Устремляя τ_1 к бесконечности, получаем

$$E^2(T,W,I,\delta) \geqslant \delta^2|\mu_1|^2 + \delta^2\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^2c_k \geqslant e^2(T,W,I,\delta,\varphi).$$

Отсюда следует, что метод φ является оптимальным. □

Применим полученную теорему для решения поставленной задачи. Обозначим

$$\xi_j = \left(2\sum_{l=2}^{j}(l-1)^{r+k}((j-1)^{r-k}-(l-1)^{r-k})\right)^{1/2}, \quad j=2,\dots n+1.$$

Следствие 4.4.1. *Пусть $1/\delta \in (\xi_s,\xi_{s+1}]$ при некотором $2 \leqslant s \leqslant n$ или $1/\delta \in (\xi_{n+1},+\infty)$ (в этом случае считаем $s=n+1$). Тогда*

$$E(T,W,I,\delta) = \delta\left(\frac{\chi_k^2}{2} + 2\sum_{l=2}^{s}\left((l-1)^{2k}-(l-1)^{r+k}(1-c_2)\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_2 = 1 - \frac{2\delta^2\sum\limits_{l=2}^{s}(l-1)^{r+k}}{1+2\delta^2\sum\limits_{l=2}^{s}(l-1)^{2r}}, \tag{4.19}$$

а метод

$$\varphi(y) = \frac{\tilde{a}_0}{\sqrt{2}}\chi_k + \sum_{l=2}^{s}\left(1-(l-1)^{r-k}(1-c_2)\right)\times$$
$$\times\left((l-1)^k\tilde{a}_{l-1}cos\left((l-1)t+\frac{\pi k}{2}\right)+(l-1)^k\tilde{b}_{l-1}sin\left((l-1)t+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

является оптимальным, где $y=(\tilde{a}_0,\tilde{a}_1,\tilde{b}_1,\dots,\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)$.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Доказано достаточное условие управляемости нелинейных дифференциальных систем треугольного вида в задаче со сменой фазового пространства.
2. Доказано достаточное условие управляемости системы со сменой фазового пространства в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями.
3. Доказано достаточное условие управляемости задачи со сменой фазового пространства в случае, когда нелинейная система в первом пространстве является системой треугольного вида, а нелинейная система во втором пространстве является локально нуль-управляемой.
4. Доказаны теоремы об оптимальном восстановлении линейного оператора и решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по исходной информации, известной со случайной ошибкой.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Осипенко Константину Юрьевичу за постановку задачи, поддержку и внимание к работе, а также Розовой Валентине Николаевне за переданное педагогическое мастерство, веру в своего ученика и поддержку.

Литература

1. Young L. C., Lectures on the Calculus of Variations and Optimal control Theory, *Sanders Co. Phladrlphia*, 1969.

2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Современное состояние теории оптимальных процессов, *Автоматика и телемеханика*, 1972,—№9.—С. 31-62.

3. Калман Р., Об Общей теории систем управления, *ТР. I конгресса ИФАК. Изд-во АН СССР*, 1961, С. 521–547.

4. Красовский Н. Н., *Теория управления движением*, М.: Наука, 1968.

5. Култышев С. Ю., Тонков Е. Л., Управляемость линейной нестационарной системы, *Дифференциальные уравнения*, 1975.—Т. XI,—№7.—С. 1206–1216.

6. Петров Н. Н., Об управляемости автономных систем, *Дифференциальные уравнения*, 1968.—Т. IV,— №4,—С. 606–617.

7. Семенов Ю. М., Об одном критерии полной управляемости неавтономных линейных систем, *Дифференциальные уравнения*, 2011.—Т. 47,—№11,—С. 1646–1652.

8. Семенов Ю. М., О полной управляемости неавтономных систем, *Дифференциальные уравнения*, 2012,—Т. 48,—№9,—С. 1265–1277.

9. Ли Э. В., Маркус Л., *Основы теории оптимального управления*, М.: Наука, 1972.

10. Kalman R. E., Duscussion: “On the Existence of Optimal Control” *ASME Journal of Basic Engineering*, 1962,—84 D,—№1,—P.21–22.

11. Болтянский А. В., О некоторых видах локальной управляемости, *Дифференциальные уравнения*, 1981,—Т.17,—№2,—С. 203–209.

12. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М., О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений, *Успехи математических наук*, 2013,—Т. 68,—№3(411),—С. 5–38.

13. Мастерков Ю. В., К вопросу о локальной управляемости в критическом случае, *Известия высших учебных заведений, Математика*, 1999,—№2,—С. 68–74.

14. Мастерков Ю. В., О локальной управляемости нелинейных систем в критическом случае, *Известия ИМИ УдГУ*, 2006,—№3(37),—С. 97–98.

15. Arutyunov A. V., Rozova V. N., Regular zero of a quadratic mapping and local controllability of nonlinear systems, *Differential equations*, 1999,—T. 35,—№6,—C. 723–728.

16. Арутюнов А. В., Управляемость нелинейных систем с ограничениями на управнения, *Дифференциальные уравнения*, 2006,—Т. 42,—№11,—С. 1443–1451.

17. Свирежев Ю. М., *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии*, М.: Наука, 1987.—С. 368.

18. Кириллов А. Н., Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2009,—№1,—С. 20–24.

19. Болтянский В. Г., Задача оптимизации со сменой фазового пространства, *Дифференциальные уравнения*, 1983,—Т. XIX,—№3.—С. 518–521.

20. Ащепков Л. Т., *Оптимальное управление разрывными системами,* М. Наука, 1987.

21. Дмитрук А. В, Каганович А. М., Принцип максимума для задачи оптимального управления с промежуточными ограничениями, *Нелинейная динамика и управление*, 2008,—№6,—С. 101–136.

22. Dmitruk A. V, Kaganovich A. M., The hibrid maximum principe is a consequence of Pontryagin maximum principe, *Systems and control letters*, 2006,—Vol.57,—№11,—P. 964–970.

23. Медведев В. А., Розова В. Н., Оптимальное управление ступенчатыми системами, *Автоматика и телемеханика*, 1972,—№3.—С. 15–23.

24. Розова В. Н., Оптимальное управление ступенчатыми системами, *Вестник РУДН. Серия: физико-математические науки*, 2006,—№1,—С. 27–32.

25. Зверкин А. М., Розова В. Н., Возвратные управления и их приложения, *Дифференциальные уравнения*, 1987,—Т. 23,—№2,—С. 228–234.

26. Розова В. Н., Задача управляемости для нелинейной системы дифференциальных уравнений специального вида, *Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика*, 2012,—№1,—С. 5-8.

27. Барсегян В. Р., Конструктивный подход к исследованию задач управления линейными составными системами, *Проблемы управления*, 2012,—№4—С. 11–17.

28. Барсегян В. Р., *Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями*, М.: Наука, 2016,—230 с.

29. Барсегян В. Р., Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями, *Известия Иркутского государственного университета, Серия Математика*, 2017,—Т. 21,—С. 19–32.

30. Барсегян В. Р., Задача управления для поэтапно меняющихся линейных систем нагруженных дифференциальных уравнений, *Автоматика и телемеханика*, 2018,—№4—С. 19–30.

31. Барсегян В. Р., Управляемость линейных систем переменной структуры с помощью динамического регулятора, *Труды института математики и механики УрО РАН*, 2024,—Т.30,—№3—С. 30–44.

32. Barseghyan V. R., Matevosyan A. G., Simonyan T. A., On the Completely Controllability of One Stage by Stage Changing Linear Stationary System Using a Dynamic Controller, *2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), 8-14 Sept. 2024*, 2024,—P. 808–812.

33. Величенко В. В., О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями, *Автоматика и телемеханика*, 1966,—№7,—С. 20–30.

34. Земляков А. С., Синтез нелинейных многомерных систем управления на основе декомпозиции-агрегирования, *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2002,—№4,—С. 40–47.

35. Максимов В. П., Чадов А. Л., Гибридные модели в задачах экономической динамики, *Вестник Пермского университета. Экономика*, 2011,—вып. 2(9),—С. 13–23.

36. Кириллов А. Н., Моделирование динамики структур гибридных систем, *Информационно-управляющие системы, Моделирование систем и процессов*, 2011,—№4,—С. 42–46.

37. Бударгин О. М., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н., Новые эффективные критерии управляемости и наблюдаемости для систем большой размерности, *Проблемы управления*, 2012,—№1,—С. 21–25.

38. Мисриханов М. Ш., Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости, *Автоматика и телемеханика*, 2005,—№12,—С. 93–104.

39. Валуев А. М., Моделирование транспортных процессов в формализме гибридных систем, *XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 16-19 июня*, 2014.

40. Валуев А. М., Формализация и вариационный анализ класса гибридных систем, моделирующие переключаемые производственные процессы, *Труды 4-ой международной конференции по проблемам управления. Москва, 26-30 января 2009, Институт проблем управления им. Трапезникова РАН*, 2009,—С. 116–124.

41. Кириллов А. Н., Задачи управления гибридными системами, *Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах-УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург, 9-11 октября 2012*, С. 752–753.

42. Галахова М. Е., Кириллов А. Н., Управление линейной системой со структурными изменениями, *Труды Карельского научного центра РАН*, 2012,—№5,—С.18–21.

43. Григорьев И. С., Данилина И. А., Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелета ступенчатых космических аппаратов, *Автоматика и телемеханика*, 2007,—№8,—С. 86–105.

44. Зотов Ю. К., Тимофеев А. В., Управляемость и робастная стабилизация программных движений летательных аппаратов с нелинейной динамикой, *Труды СПИИРАН*, 2006,—вып.3,—Т. 2,—С. 383–405.

45. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю, Тихомиров В. М., Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления, *Пробл. передачи информ.*, 2003,—39:1,— С. 118–133.

46. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю, Тихомиров В. М., Оптимальное восстановление и теория экстремума, *Докл. РАН*, 2001,—379:2,—С. 161–164.

47. Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, *Успехи мат. наук*, 1950,—Т5,—№2,—С. 165–177.

48. Смоляк С. А., Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, *Дисс. канд. физ.-мат. наук, МГУ, М.*, 1965.

49. Sard A. Best approximative integration formulas; best approximation formulas, *Amer. J. Math.*, 1949,—V.71,—№1,—,P. 80–91.

50. Traub J. F., Wozniakowski H., *A general theory of optimal algorithms*, New York–London: ACM Monograph Series, Academic Press, Inc, 1980.

51. Осипенко К. Ю., *Введение в теорию оптимального восстановления*, СПб.: Лань, 2022.

52. Osipenko K. Yu., *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Huntington, New York: Nova Science Publ., 2000.

53. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Точность и оптимальность методов восстановления функций по их спектру, *Тр. МИАН*, 2016,—№293,—С. 201–216.

54. Осипенко К. Ю., О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным, *Владикавказский мат. журн.*, 2004,—Т.6,—№4,—С. 55–62.

55. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М., *Выпуклый анализ и его приложения*, М.: Эдиториал УРСС, 2011.

56. Plaskota L., *Noisy information and computational complexity*, Cambridge': Cambridge University Press, 1996.

57. Donoho D. L., Liu R. C., MacGibbon B., Minimax risk over hyperrectangles, and implications, *Ann. Statist.*, 1990,—V.18,—№3,—P. 1416–1437.

58. Donoho D., Statistical estimation and optimalrecovery, *Ann. Statist.*, 1994,—V.22,—№1,—P. 238–270.

59. Reshetov S. Minimax risk for quadratically convex sets, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2010,—V.167,—№4,—P. 537–542.

60. Кривошеев К. Ю., Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой, *Матем.сб.*, 2021,—Т.212,—№11,—С. 89–108.

61. Wilczynski M., Minimax estimation in linear regression with ellipsoidal constraints, *J. Math. Sci. J. Stat. Plann. Inference*, 2007,—V.137,—№1б—P. 79–86.

62. Wilczynski M., Minimax estimation over ellipsoids in l_2, *Statistics*, 2008,—V.42,—№2,—P. 95–100.

63. Введенская Е. В., Об оптимальном восстановлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений, *Дифференциальные уравнения*, 2009,—Т.45,—№2,—С. 255–259.

64. Максимова И. С., Розова В. Н., ЛОкальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства, *Вестник РУДН. Серия: Естественные и технические науки*, 2017,—Т.25, —№4,—С. 331–338.

65. Максимова И. С., Розова В. Н., Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства, *Вестник ТГУ. Серия Естественные и технические науки*, 2011,—Т. 16.—Вып. 3,—С. 742–747.

66. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

67. Арутюнов А. В., *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, М.: Факториал, 1997.

68. Ройтенберг Я. Н., *Автоматическое управление*, М. Наука, 1978.

69. Коробов В. И., Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем, *Дифференциальные уравнения*, 1973.—Т.9,—№4.—С.614–619.

70. Коробов В. И., *Метод функции управляемости*, М.: - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2007.

71. Коробов В. И., Павличков С. С., *Управляемость треугольных систем, неэквивалентных каноническим системам*, Вестник Харьковского национального университета, Серия Матемтаика, прикладная математика и механика, 2000,—№475,—С. 323–329.

72. Коробов В. И., Иванова Т. И., *Отображение нелинейных управляемых систем специального вида на каноническую систему*, Математическая физика, анализ, геометрия, 2001,—Т.8,—№1,—С. 42–57.

73. Коробов В. И., Павличков С. С., *Непрерывная зависимость решения задачи управления*, Математическая физика, анализ, геометрия, 2001,—, Т.8,—№2,—С. 190–203.

74. Korobov V. I., Sclayr G. M. *Methods of constructing positional controls and the admissible maximum principle Differential equations*, 1990,—Vol. 26,—№11,—pp. 1914–1924

75. Габасов Р., Кириллова Ф. М, Методы оптимального управления, *Современные проблемы математики, Итоги науки и техники*, 1975,—6,—С. 131–260.

76. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., *Очерки по математической теории систем*, М., Мир, 1971.

77. Красовский А. А., *Справочник по теории автоматического управления под ред. Красовсого А.А.* М. Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1987,—711.

78. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В., *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, М.: Либроком, 2011.

79. Благодатских В. И., Филиппов А.Ф., Дифференциальные включения и оптимальное управление, *Труды МИАН СССР*, 1985.—Т. 169.—С. 194–252.

80. Благодатских В. И., Ндии П., Выпуклость множества решений дифференциального включения, *Вестник Моск.университета. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернентика*, 1998,—№3—С. 21–22.

81. Благодатских В. И., О выпуклости сфер достижимости, *Дифференциальные уравнения*, 1972,—Т.8,—№12,—С. 2149–2155.

82. Благодатских В. И., *Введение в оптимальное управление (линейная теория)*, М.: Высшая школа, 2001.

83. Тарасов Е. В., *Оптимальные режимы полета летательных аппаратов.* М.: 1963.