

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕЕВКЛИДОВЫХ МЕТРИКАХ

К. Ю. ОСИПЕНКО

Аннотация. В работе рассматриваются задачи восстановления операторов по неточно заданной информации в неевклидовых метриках. Доказан ряд общих теорем, которые применяются к задачам восстановления функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье. В некоторых случаях находится семейство оптимальных методов, из которого выбираются методы, использующие минимальный объем исходной информации.

ВВЕДЕНИЕ

Общая задача оптимального восстановления линейного оператора Λ , действующего из линейного пространства X в линейное нормированное пространство Z , на множестве $W \subset X$ по неточно заданным значениям другого линейного оператора $I: X \rightarrow Y$, где Y — линейное нормированное пространство, может быть сформулирована, как задача о нахождении при фиксированном $\delta \geq 0$, характеризующем погрешность задания исходной информации, величины

$$(1) \quad E(\Lambda, W, I, \delta) = \inf_{m: Y \rightarrow Z} \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} \|\Lambda x - m(y)\|_Z,$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, а также отображения (метода), на котором достигается нижняя грань в (1), называемым *оптимальным методом восстановления*.

В простейшем случае, когда Λ — линейный функционал, Y — конечномерное пространство и $\delta = 0$, эта задача была поставлена С. А. Смоляком [1]. Им же было доказано, что для выпуклого и центрально-симметричного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный. Этот результат и сама постановка задачи, опубликованные лишь в диссертации, не были широко доступны. Внимание к ним привлек Н. С. Бахвалов [2], который инициировал дальнейшие исследования в этом направлении, в результате чего были получены некоторые оптимальные методы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №13-01-12447).

восстановления для конкретных задач, а также обобщена исходная постановка на комплексный случай и случай задания исходной информации с погрешностью (см. [3]–[5]).

В дальнейшем обобщении исходной постановки было посвящено много работ (см. [6]–[13], а также библиографию в этих работах). Окончательный, в определенном смысле, результат для линейных функционалов, а именно, необходимые и достаточные условия существования оптимального линейного метода, был получен в работе [8].

Довольно часто рассматривается ситуация, когда само множество W , на котором восстанавливается оператор Λ также задается некоторым линейным оператором

$$W = \{ x \in X : \|I_1 x\|_{Y_1} \leq \delta_1 \},$$

где $I_1: X \rightarrow Y_1$, а Y_1 — линейное нормированное пространство. Общий результат, касающийся существования линейного оптимального метода для случая, когда Y , Y_1 и Z — гильбертовы пространства, был доказан в работе [14] и там же получены первые конкретные результаты о восстановлении линейных операторов. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах [15]–[17], где использовались подходы, основанные на общих принципах теории экстремума. Однако во всех этих работах существенно использовалась евклидовость рассматриваемых пространств.

Настоящая работа посвящена задачам восстановления линейных операторов в неевклидовом случае. Первый пример (и единственный до недавнего времени) построения оптимального метода восстановления для такой ситуации был приведен в работе [6, теорема 12] (далее, мы подробнее разберем этот пример и как следствие общих результатов получим для него целое семейство оптимальных методов). Другой пример построения оптимального метода в неевклидовом случае был получен в работе [18]. В данной работе делается попытка получения ряда общих результатов о восстановлении линейных операторов в неевклидовом случае.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ -алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ -аддитивная мера на Σ . Через $L_p(T, \Sigma, \mu)$ (или короче $L_p(T, \mu)$) обозначается совокупность всех Σ -измеримых функций со значениями в \mathbb{R} или \mathbb{C} , для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)} = \begin{cases} \left(\int_T |x(t)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{vraisup}_{t \in T} |x(t)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \{x(\cdot) \in L_p(T, \mu) : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)} < \infty\}, \\ W &= \{x(\cdot) \in \mathcal{W} : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T, \mu)} \leq 1\},\end{aligned}$$

где $1 \leq p, r \leq \infty$, а $\varphi(\cdot)$ — некоторая функция на T .

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda: \mathcal{W} \rightarrow L_q(T, \mu)$, $1 \leq q \leq \infty$, задаваемого равенством $\Lambda x(\cdot) = \psi(\cdot)x(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ — некоторая функция на T , на классе W по функции $x(\cdot) \in W$, известной с погрешностью на некотором подмножестве T (несложно написать условия на функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, при которых оператор Λ будет отображать пространство \mathcal{W} в $L_q(T, \mu)$, но мы не будем на этом останавливаться, считая, что соответствующие условия выполнены).

Предполагается, что для каждой функции $x(\cdot) \in W$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(T_0, \mu)$, $T_0 \subset T$, такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta$, $\delta \geq 0$. Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить $\Lambda x(\cdot)$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m: L_p(T_0, \mu) \rightarrow L_q(T, \mu)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{pqr}(m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W, y(\cdot) \in L_p(T_0, \mu) \\ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

Величина

$$E_{pqr} = \inf_{m: L_p(T_0, \mu) \rightarrow L_q(T, \mu)} e_{pqr}(m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Легко убедиться, что имеет место неравенство

$$(2) \quad E_{pqr} \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

Действительно, пусть $x(\cdot) \in W$, $\|x(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta$, а $m: L_p(T_0, \mu) \rightarrow L_q(T, \mu)$ — произвольный метод восстановления. Тогда в силу того, что $x(\cdot) \in W$ и $-x(\cdot) \in W$ имеем

$$\begin{aligned}2\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} &\leq \|\Lambda x(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \\ &\quad + \|\Lambda(-x(\cdot)) - m(0)(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)} \leq 2e(p, q, r, m).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого метода m

$$e_{pqr}(m) \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W \\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T_0, \mu)} \leq \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T, \mu)}.$$

Переходя к нижней грани в левой части по всем методам, получаем нужное неравенство.

Для оценки снизу погрешности оптимального восстановления, вытекающей из неравенства (2), будет решаться экстремальная задача, возникающая в правой части этого неравенства. Приведем один простой результат (близкий к достаточным условиям в теореме Куна–Таккера), используемый для решения соответствующих экстремальных задач.

Пусть $f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$, — функции, определенные на некотором множестве A . Рассмотрим экстремальную задачу

$$(3) \quad f_0(x) \rightarrow \max, \quad f_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in A,$$

и ее функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Лемма 1. Пусть существуют $\hat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и допустимый в задаче (3) элемент $\hat{x} \in A$, для которых

$$(a) \quad \min_{x \in A} \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}), \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j f_j(\hat{x}) = 0.$$

Тогда \hat{x} — экстремальный элемент в задаче (3).

Доказательство. Для любого допустимого в задаче (3) элемента $x \in A$ имеем

$$-f_0(x) \geq \mathcal{L}(x, \hat{\lambda}) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = f_0(\hat{x}).$$

□

2. СЛУЧАЙ $r = q$

Рассмотрим случай, когда $1 \leq q < p < \infty$, $r = q$. Будем использовать следующее обозначение

$$a_+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $1 \leq q < p < \infty$ и $\delta > 0$. Предположим, что $\hat{\lambda}_2 > 0$ удовлетворяет условию

$$(4) \quad \left(\int_{T_0} \left(|\psi(t)|^q - \hat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{1/p}$$

$$= \delta \left(\int_{T_0} |\varphi(t)|^q \left(|\psi(t)|^q - \hat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{q}{p-q}} d\mu(t) \right)^{1/q} > 0$$

(от функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем требовать, чтобы указанные интегралы существовали) и для почти всех $t \notin T_0$ $|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \leq 0$. Тогда

$$E_{pq} = \left(\frac{p}{q} \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/q},$$

где

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{q}{p} \delta^{q-p} \left(\int_{T_0} \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}},$$

а метод

$$(5) \quad \widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \psi(t) \left(1 - \widehat{\lambda}_2 \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q} \right) y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. 1. Оценка снизу. Экстремальная задача в правой части (2) (для удобства записи мы возводим ее в q -ую степень) имеет вид

$$(6) \quad \int_T |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_{T_0} |x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)x(t)|^q d\mu(t) \leq 1.$$

Напишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_T L(x(t), \lambda_1, \lambda_2) d\mu(t),$$

где

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} -|\psi(t)x|^q + \lambda_1 |x|^p + \lambda_2 |\varphi(t)x|^q, & t \in T_0, \\ -|\psi(t)x|^q + \lambda_2 |\varphi(t)x|^q, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p\widehat{\lambda}_1} \left(|\psi(t)|^q - \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^q \right)_+ \right)^{\frac{1}{p-q}}, & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при всех $x(\cdot)$

$$L(x(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq L(\widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2).$$

Тем самым

$$\mathcal{L}(x(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq \mathcal{L}(\widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2).$$

Из определения $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ вытекает справедливость равенств

$$(7) \quad \begin{aligned} \int_{T_0} |\widehat{x}(t)|^p d\mu(t) &= \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) &= 1. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 $\widehat{x}(\cdot)$ является решением задачи (6). Тем самым значение этой задачи

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t).$$

Интегрируя по T равенство

$$-q|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q + p\widehat{\lambda}_1|\widehat{x}(t)|^p + q\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)\widehat{x}(t)|^q = 0,$$

которое очевидным образом следует из определения $\widehat{x}(\cdot)$, получаем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) = \frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2.$$

Из (2) вытекает, что

$$E_{pqq} \geq \left(\frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p + \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/q}.$$

2. Оценка сверху. Положим

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(1 - \lambda_2 \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q} \right)_+, & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

Для оценки погрешности метода (5) надо найти значение следующей экстремальной задачи

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_{T_0} |\psi(t)|^q |x(t) - \alpha(t)y(t)|^q d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) &\rightarrow \max, \\ \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^q d\mu(t) &\leq 1. \end{aligned}$$

Задача (8), положив $z(\cdot) = x(\cdot) - y(\cdot)$, переписывается в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} \int_{T_0} |\psi(t)|^q |(1 - \alpha(t))x(t) + \alpha(t)z(t)|^q d\mu(t) \\ + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) &\rightarrow \max, \\ \int_{T_0} |z(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^q |x(t)|^q d\mu(t) &\leq 1. \end{aligned}$$

Значение этой задачи очевидно совпадает со значением задачи

$$(10) \quad \int_T |\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))v(t) + \alpha(t)u(t))^q d\mu(t) \rightarrow \max,$$

$$\int_{T_0} u^p(t) d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^q v^q(t) d\mu(t) \leq 1,$$

$$u(t), v(t) \geq 0, \quad \text{для почти всех } t \in T.$$

Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}_1(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_T L_1(u(t), v(t), \lambda_1, \lambda_2) d\mu(t),$$

где

$$L_1(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} -|\psi(t)|^q ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^q \\ \quad + \lambda_1 u^p + \lambda_2 |\varphi(t)|^q v^q, & t \in T_0, \\ -|\psi(t)|^q v^q + \lambda_2 |\varphi(t)|^q v^q, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Положим $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$. Тогда при $\alpha(t) > 0$

$$\frac{\partial L_1}{\partial v} = q\widehat{\lambda}_2 |\psi(t)|^q (v^{q-1} - ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^{q-1}).$$

Следовательно, при $\alpha(t) > 0$ и любом фиксированном $u > 0$ функция $L_1(u, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ при $v \in (0, +\infty)$ достигает минимума для $v = u$. Если же $\alpha(t) = 0$, то $L_1(u, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0$. Таким образом, имеем для всех $u(t), v(t) \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u(\cdot), v(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &\geq \int_{T_0} L_1(u(\cdot), u(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &= \int_{T_0} L(u(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \geq \int_{T_0} L(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &= \mathcal{L}_1(\widehat{x}(\cdot), \widehat{x}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2). \end{aligned}$$

Учитывая (7), получаем, что функции $\widehat{u}(\cdot) = \widehat{v}(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$ являются решением задачи (10). Следовательно,

$$e_{pq}^q(\widehat{m}) = \int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) = \frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_2 \leq E_{pq}^q.$$

Отсюда вытекает оптимальность метода \widehat{m} и выражение для погрешности оптимального восстановления. \square

3. СЛУЧАЙ $q = p$

Рассмотрим случай, когда $1 \leq p < r < \infty$, $q = p$ и $T_0 = T$.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < r < \infty$ и $\delta > 0$. Предположим, что $\widehat{\lambda}_1 > 0$ удовлетворяет условию

$$(11) \quad \left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \right)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(t) \right)^{1/p} \\ = \delta \left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \right)_+^{\frac{r}{r-p}} d\mu(t) \right)^{1/r} > 0$$

(от функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем требовать, чтобы указанные интегралы существовали). Тогда

$$E_{ppr} = \left(\widehat{\lambda}_1 \delta^p + \frac{r}{p} \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/p},$$

где

$$\widehat{\lambda}_2 = \frac{p}{r} \delta^{p-r} \left(\int_T |\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}} \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \right)_+^{\frac{p}{r-p}} d\mu(t) \right)^{\frac{r-p}{p}},$$

а метод

$$(12) \quad \widehat{m}(y)(t) = \psi(t) \alpha(t) y(t),$$

где

$$\alpha(t) = 1 - \left(1 - \frac{\widehat{\lambda}_1}{|\psi(t)|^p} \right)_+.$$

является оптимальным.

Доказательство. Схема доказательства здесь во многом аналогична доказательству предыдущей теоремы.

1. Оценка снизу. Экстремальная задача в правой части (2) (для удобства записи мы возводим ее в p -ую степень) имеет вид

$$(13) \quad \int_T |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_T |x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq 1.$$

Напишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_T L(x(t), \lambda_1, \lambda_2) d\mu(t),$$

где

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = -|\psi(t)x|^p + \lambda_1 |x|^p + \lambda_2 |\varphi(t)x|^r.$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \left(\frac{p \left(|\psi(t)|^p - \widehat{\lambda}_1 \right)_+}{r \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^r} \right)^{\frac{1}{r-p}}.$$

Нетрудно убедиться, что при всех $x(\cdot)$

$$L(x(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq L(\widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2).$$

Тем самым

$$\mathcal{L}(x(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq \mathcal{L}(\widehat{x}(t), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2).$$

В силу определения $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ справедливы равенства

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_T |\widehat{x}(t)|^p d\mu(t) &= \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)\widehat{x}(t)|^r d\mu(t) &= 1. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 $\widehat{x}(\cdot)$ является решением задачи (13). Тем самым значение этой задачи

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^p d\mu(t).$$

Интегрируя по T равенство

$$-p|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q + p\widehat{\lambda}_1|\widehat{x}(t)|^p + r\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)\widehat{x}(t)|^r = 0,$$

которое очевидным образом следует из определения $\widehat{x}(\cdot)$, получаем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^p d\mu(t) = \widehat{\lambda}_1\delta^p + \frac{r}{p}\widehat{\lambda}_2.$$

Из (2) вытекает, что

$$E_{ppr} \geq \left(\widehat{\lambda}_1\delta^p + \frac{r}{p}\widehat{\lambda}_2 \right)^{1/p}.$$

2. Оценка сверху. Для оценки погрешности метода (12) надо найти значение следующей экстремальной задачи

$$(15) \quad \begin{aligned} \int_T |\psi(t)|^p |x(t) - \alpha(t)y(t)|^p d\mu(t) &\rightarrow \max, \\ \int_T |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) &\leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq 1. \end{aligned}$$

Задача (15), положив $z(\cdot) = x(\cdot) - y(\cdot)$, переписывается в виде

$$(16) \quad \begin{aligned} \int_T |\psi(t)|^p |(1 - \alpha(t))x(t) + \alpha(t)z(t)|^p d\mu(t) &\rightarrow \max, \\ \int_T |z(t)|^p d\mu(t) &\leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^r d\mu(t) \leq 1. \end{aligned}$$

Значение этой задачи совпадает со значением задачи

$$(17) \quad \begin{aligned} \int_T |\psi(t)|^p ((1 - \alpha(t))v(t) + \alpha(t)u(t))^p d\mu(t) &\rightarrow \max, \\ \int_T u^p(t) d\mu(t) &\leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)|^r v^r(t) d\mu(t) \leq 1, \\ u(t), v(t) &\geq 0, \text{ для почти всех } t \in T. \end{aligned}$$

Выпишем функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}_1(u(\cdot), v(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_T L_1(u(t), v(t), \lambda_1, \lambda_2) d\mu(t),$$

где

$$L_1(u, v, \lambda_1, \lambda_2) = -|\psi(t)|^p((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^p + \lambda_1 u^p + \lambda_2 |\varphi(t)|^r v^r.$$

Положим $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$. Тогда при $|\psi(t)|^p > \widehat{\lambda}_1$

$$\frac{\partial L_1}{\partial u} = p\widehat{\lambda}_1(u^{p-1} - ((1 - \alpha(t))v + \alpha(t)u)^{p-1}).$$

Следовательно, при $|\psi(t)|^p > \widehat{\lambda}_1$ и любом фиксированном $v > 0$ функция $L_1(u, v, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$ при $u \in (0, +\infty)$ достигает минимума для $u = v$. Если же $|\psi(t)|^p \leq \widehat{\lambda}_1$, то $\alpha(t) = 1$ и $L_1(u, v) \geq 0$. Положим $T_1 = \{t \in T : |\psi(t)|^p > \widehat{\lambda}_1\}$. Тогда для всех $u(t), v(t) \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(u(\cdot), v(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) &\geq \int_{T_1} L_1(u(\cdot), u(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &= \int_{T_1} L(u(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \geq \int_{T_1} L(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) d\mu(t) \\ &= \mathcal{L}_1(\widehat{x}(\cdot), \widehat{x}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2). \end{aligned}$$

Учитывая (14), получаем, что функции $\widehat{u}(\cdot) = \widehat{v}(\cdot) = \widehat{x}(\cdot)$ являются решением задачи (17). Следовательно,

$$e_{ppr}^p(\widehat{m}) = \int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) = \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \frac{r}{p} \widehat{\lambda}_2 \leq E_{ppr}^p.$$

Отсюда вытекает оптимальность метода \widehat{m} и выражение для погрешности оптимального восстановления. \square

4. СЛУЧАЙ $r = p$

Рассмотрим случай, когда $1 \leq q < p = r < \infty$. Обозначим через $\chi_0(\cdot)$ характеристическую функцию множества T_0

$$\chi_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq q < p < \infty$ и $\delta > 0$. Предположим, что $\widehat{\lambda}_2 > 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (18) \quad &\int_{T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{1 + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \\ &= \delta^p \int_T |\varphi(t)|^p \left(\frac{|\psi(t)|^q}{\chi_0(t) + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) > 0 \end{aligned}$$

(от функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем требовать, чтобы указанные интегралы существовали). Тогда

$$E_{pqp} = \left(\widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/q},$$

где

$$\lambda_1 = \delta^{q-p} \left(\int_{T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{1 + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \frac{\psi(t)}{1 + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p} y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. 1. Оценка снизу. Экстремальная задача в правой части (2) (как и в предыдущих случаях, для удобства мы возводим ее в q -ую степень) имеет вид

$$(19) \quad \int_T |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_{T_0} |x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq 1.$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \widehat{\lambda}_1^{-\frac{1}{p-q}} \left(\frac{|\psi(t)|^q}{\chi_0(t) + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p} \right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

В силу определения $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ нетрудно убедиться, что для $\widehat{x}(\cdot)$ справедливы равенства

$$\int_{T_0} |\widehat{x}(t)|^p d\mu(t) = \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)\widehat{x}(t)|^p d\mu(t) = 1.$$

Следовательно, $\widehat{x}(\cdot)$ является допустимой функцией в задаче (19). Тем самым значение этой задачи не менее, чем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t).$$

Интегрируя по T равенство

$$|\psi(t)\widehat{x}(t)|^q = \widehat{\lambda}_1 |\widehat{x}(t)|^p \chi_0(t) + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)\widehat{x}(t)|^p,$$

которое очевидным образом следует из определения $\widehat{x}(\cdot)$, получаем

$$\int_T |\psi(t)\widehat{x}(t)|^q d\mu(t) = \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2.$$

Из (2) вытекает, что

$$E_{pqp} \geq \left(\widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \right)^{1/q}.$$

2. Оценка сверху. Будем искать оптимальный метод восстановления в виде

$$\widehat{m}(y)(\cdot) = \alpha(\cdot)y(\cdot).$$

Для оценки погрешности такого метода надо найти значение следующей экстремальной задачи

$$(20) \quad \int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \alpha(t)y(t)|^q d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^q d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq 1.$$

По неравенству Гельдера имеем

$$(21) \quad |(\psi(t) - \alpha(t))x(t) + \alpha(t)(x(t) - y(t))|^q \\ \leq h(t) \left(\widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)x(t)|^p + |x(t) - y(t)|^p \right)^{q/p}, \\ h(t) = \left(\frac{|\psi(t) - \alpha(t)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_2^{p'/p} |\varphi(t)|^{p'}} + |\alpha(t)|^{p'} \right)^{q/p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Следовательно, значение задачи (20) оценивается величиной

$$(22) \quad \int_T f(t)g(t) d\mu(t),$$

где

$$f(t) = \begin{cases} h(t), & t \in T_0, \\ \frac{|\psi(t)|^q}{\widehat{\lambda}_2^{q/p} |\varphi(t)|^q}, & t \in T \setminus T_0, \end{cases} \\ g(t) = \begin{cases} \left(\widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)x(t)|^p + |z(t)|^p \right)^{q/p}, & t \in T_0, \\ \widehat{\lambda}_2^{q/p} |\varphi(t)x(t)|^q, & t \in T \setminus T_0, \end{cases}.$$

Положим

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{1 + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p}.$$

Тогда

$$f(t) = \frac{|\psi(t)|^q}{(\chi_0(t) + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p)^{q/p}}.$$

Применяя к (22) неравенство Гельдера, получаем оценку

$$\left(\int_T |f(t)|^{s'} d\mu(t) \right)^{1/s'} \left(\int_T |g(t)|^s d\mu(t) \right)^{1/s},$$

где $1/s + 1/s' = 1$. Взяв $s = p/q$, будем иметь для этой оценки

$$\begin{aligned} & \left(\int_T |f(t)|^{\frac{p}{p-q}} d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_T |g(t)|^{p/q} d\mu(t) \right)^{q/p} \\ & \leq (\delta^p + \widehat{\lambda}_2)^{q/p} \left(\int_T \frac{|\psi(t)|^{\frac{qp}{p-q}}}{(\chi_0(t) + \widehat{\lambda}_2 |\varphi(t)|^p)^{\frac{q}{p-q}}} d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}} \\ & = (\widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2)^{q/p} \left(\int_T |\psi(t) \widehat{x}(t)|^q d\mu(t) \right)^{\frac{p-q}{p}} = \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$e_{pqp}^q(\widehat{m}) \leq \widehat{\lambda}_1 \delta^p + \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \leq E_{pqp}^q.$$

□

5. СЛУЧАЙ $r = q = p$

Рассмотрим случай, когда $1 \leq p < \infty$, $r = q = p$.

Теорема 4. Пусть $1 \leq p < \infty$. Предположим, что существуют такие $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, что значение экстремальной задачи

$$(23) \quad \int_T |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \rightarrow \max, \quad \int_{T_0} |x(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \\ \int_T |\varphi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq 1,$$

не меньше, чем $\lambda_1 \delta^p + \lambda_2$, и при почти всех $t \in T$ выполнено неравенство

$$(24) \quad -|\psi(t)|^p + \lambda_1 \chi_0(t) + \lambda_2 |\varphi(t)|^p \geq 0,$$

где $\chi_0(\cdot)$ — характеристическая функция множества T_0 . Тогда

$$E_{ppp} = (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p},$$

а все методы

$$(25) \quad \widehat{m}(y)(\cdot) = \begin{cases} \alpha(\cdot)y(\cdot), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

в которых $\alpha(\cdot)$ почти для всех $t \in T_0$ при $\delta > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, удовлетворяют условию

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{|\psi(t) - \alpha(t)|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p} |\varphi(t)|^{p'}} + \frac{|\alpha(t)|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p}} \leq 1, & 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \\ \frac{|\psi(t) - \alpha(t)|}{\lambda_2 |\varphi(t)|} \leq 1, \quad \frac{|\alpha(t)|}{\lambda_1} \leq 1, & p = 1, \end{cases}$$

а при $1 \leq p < \infty$, $\delta = 0$, — условию

$$(27) \quad |\psi(t) - \alpha(t)| \leq \lambda_2^{1/p} |\varphi(t)|,$$

являются оптимальными. При $\lambda_1 = 0$ метод $\widehat{m}(y)(\cdot) = 0$ — оптимальный, а при $\lambda_2 = 0$ метод (25) с $\alpha(\cdot) = \psi(\cdot)$ — оптимальный.

Доказательство. Из условия теоремы и неравенства (2) вытекает, что

$$E_{ppp} \geq (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p}.$$

Пусть $\delta > 0$ и $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Для оценки методов вида (25) рассмотрим экстремальную задачу

$$(28) \quad \int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \alpha(t)y(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \rightarrow \max,$$

$$\int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \delta^p, \quad \int_T |\varphi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq 1.$$

Аналогично (21) имеем

$$|(\psi(t) - \alpha(t)x(t) + \alpha(t)(x(t) - y(t)))|^p \leq h_p(t) (\lambda_2 |\varphi(t)x(t)|^p + \lambda_1 |x(t) - y(t)|^p),$$

где

$$h_p(t) = \begin{cases} \left(\frac{|\psi(t) - \alpha(t)|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p} |\varphi(t)|^{p'}} + \frac{|\alpha(t)|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p}} \right)^{p/p'}, & 1 < p < \infty, \\ \max \left\{ \frac{|\psi(t) - \alpha(t)|}{\lambda_2 |\varphi(t)|}, \frac{|\alpha(t)|}{\lambda_1} \right\}, & p = 1. \end{cases}$$

Следовательно, положив

$$S(\alpha(\cdot)) = \operatorname{vraisup}_{t \in T_0} h_p(t),$$

и учитывая, что по условию теоремы $S(\alpha(\cdot)) \leq 1$, а также то, что при $t \in T \setminus T_0$ неравенство (24) имеет вид $|\psi(t)|^p \leq \lambda_2 |\varphi(t)|^p$, получаем

$$\int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \alpha(t)y(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq S(\alpha(\cdot)) \int_{T_0} (\lambda_2 |\varphi(t)x(t)|^p + \lambda_1 |x(t) - y(t)|^p) d\mu(t) + \lambda_2 \int_{T \setminus T_0} |\varphi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq \lambda_1 \delta^p + \lambda_2.$$

Отсюда

$$e_{ppp}(\widehat{m}) \leq (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p} \leq E_{ppp}.$$

Остается показать, что множество $\alpha(\cdot)$, удовлетворяющих условиям (26) не пусто. Положим

$$(29) \quad \widehat{\alpha}(t) = \frac{\lambda_1 \psi(t)}{\lambda_1 + \lambda_2 |\varphi(t)|^p}.$$

Тогда

$$S(\widehat{\alpha})(t) = \operatorname{vraisup}_{t \in T_0} \left(\frac{|\psi(t)|^p}{\lambda_1 + \lambda_2 |\varphi(t)|^p} \right).$$

Из неравенства (24) вытекает, что $S(\widehat{\alpha})(t) \leq 1$.

При $\delta = 0$ следует оценить значение экстремальной задачи

$$\int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \alpha(t)x(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \rightarrow \max, \\ \int_T |\varphi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq 1.$$

В силу условия (27) Имеем

$$|\psi(t)x(t) - \alpha(t)x(t)|^p \leq \lambda_2 |\varphi(t)x(t)|^p.$$

Учитывая, что $|\psi(t)|^p \leq \lambda_2 |\varphi(t)|^p$ при $t \in T \setminus T_0$, получаем

$$\int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \alpha(t)x(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq \lambda_2.$$

Если $\lambda_1 = 0$, то $|\psi(t)|^p \leq \lambda_2 |\varphi(t)|^p$ для почти всех $t \in T$, и для метода $\widehat{m}(y)(\cdot) = 0$ имеем

$$\int_T |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \leq \lambda_2.$$

Если $\lambda_2 = 0$, то $|\psi(t)|^p \leq \lambda_1$ для почти всех $t \in T_0$ и $\psi(t) = 0$ для почти всех $t \in T \setminus T_0$. Поэтому

$$\int_{T_0} |\psi(t)x(t) - \psi(t)y(t)|^p d\mu(t) + \int_{T \setminus T_0} |\psi(t)x(t)|^p d\mu(t) \\ \leq \lambda_1 \int_{T_0} |x(t) - y(t)|^p d\mu(t) \leq \lambda_1 \delta^p.$$

□

Действие получаемых оптимальных методов можно представить как действие восстанавливаемого оператора, умноженное на некоторую функцию, которую можно трактовать как фильтр или сглаживающий множитель. Например, для (29) метод имеет вид

$$\widehat{m}(y)(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \psi(t)}{\lambda_1 + \lambda_2 |\varphi(t)|^p} y(t), & t \in T_0, \\ 0, & t \notin T_0, \end{cases}$$

и в качестве такого фильтра выступает функция

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 |\varphi(t)|^p}.$$

Нас будет интересовать множества, для которых можно обойтись без фильтрования, т.е. положить этот множитель равным 1. И, кроме того, мы будем интересоваться насколько можно уменьшить исходное множество, на котором задается неточная информация о функции, не увеличивая погрешность оптимального восстановления. Иными словами, мы хотим найти множества, на которых можно положить $\alpha(t) = \psi(t)$ и $\alpha(t) = 0$.

Положим

$$T^0 = \{t \in T_0 : |\psi(t)| \leq \lambda_2^{1/p} |\varphi(t)|\}, \quad T^1 = \{t \in T_0 : |\psi(t)| \leq \lambda_1^{1/p}\}.$$

Следствие 1. При $\delta > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, методы

$$\hat{m}(y)(t) = \begin{cases} \psi(t)y(t), & t \in T^1, \\ \alpha(t)y(t), & t \in T_0 \setminus (T^1 \cup T^0), \\ 0, & t \in T^0 \cup (T \setminus T_0), \end{cases}$$

где $\alpha(\cdot)$ удовлетворяют условиям (26) являются оптимальными. При $\delta = 0$ методы

$$\hat{m}(y)(t) = \begin{cases} \psi(t)y(t), & t \in T_0 \setminus T^0, \\ 0, & t \in T^0 \cup (T \setminus T_0), \end{cases}$$

являются оптимальными.

Из следствия 1 вытекает, что существуют оптимальные методы, которые используют неточно заданную информацию только на множестве $T_0 \setminus T^0$. Иными словами, информация на множестве T^0 оказывается лишней в том смысле, что не уменьшает погрешность оптимального восстановления.

6. ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

Пусть S — пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на \mathbb{R} , S' — соответствующее пространство обобщенных функций, $F: S' \rightarrow S'$ — преобразование Фурье. Обозначим через \mathcal{F}_p пространство обобщенных функций из S' , для которых

$$\|x(\cdot)\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |Fx(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{vraisup}_{\xi \in \mathbb{R}} |Fx(\xi)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p^n &= \{x(\cdot) \in S' : \|x^{(n)}(\cdot)\|_p < \infty\}, \\ F_p^n &= \{x \in \mathcal{F}_p^n : \|x^{(n)}(\cdot)\|_p \leq 1\}.\end{aligned}$$

Допустим, что для функции $x(\cdot) \in F_r^n \cap \mathcal{F}_p$ известно на интервале $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, $0 < \sigma \leq \infty$, ее преобразование Фурье с точностью до $\delta \geq 0$ в метрике $L_p(\Delta_\sigma)$, т. е. известна функция $y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma)$ такая, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta$. Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы для $0 \leq k < n$ восстановить k -ую производную функции в метрике \mathcal{F}_q ? Под методами восстановления здесь понимаются всевозможные отображения $m: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow \mathcal{F}_q$. Погрешностью метода называется величина

$$e_{pqr}(m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in F_r^n \cap \mathcal{F}_p, y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_p.$$

Погрешность оптимального восстановления определяется следующим образом

$$E_{pqr} = \inf_{m: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow \mathcal{F}_q} e_{pqr}(m),$$

а метод, на котором эта нижняя грань достигается, называется оптимальным.

Легко понять, что эта задача является частным случаем общей задачи, рассмотренной выше, в которой $T = \mathbb{R}$, $T_0 = \Delta_\sigma$, $\psi(\xi) = (i\xi)^k$, $\varphi(\xi) = (i\xi)^n$. Применим полученные общие результаты к рассматриваемой задаче.

Начнем со случая $1 \leq r = q < p < \infty$ и $\delta > 0$. Положим

$$B = B\left(\frac{k + 1/q - 1/p}{(n - k)(1 - q/p)}, \frac{2 - q/p}{1 - q/p}\right),$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — B -функция Эйлера, и

$$\hat{\sigma}_\delta = \left(\left(\frac{q}{2B} \right)^{1/q-1/p} \frac{(n - k)^{2/q-1/p}}{\delta(k + 1/q - 1/p)^{1/q}} \right)^{\frac{1}{n+1/q-1/p}}.$$

Теорема 5. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $1 \leq q < p < \infty$, $\delta > 0$ и $\sigma \geq \hat{\sigma}_\delta$. Тогда

$$E_{pqq} = \left(\frac{n + 1/q - 1/p}{k + 1/q - 1/p} \right)^{\frac{1}{q}} \hat{\sigma}_\delta^{-(n-k)},$$

а метод $\hat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k \left(1 - (|\xi|/\hat{\sigma}_\delta)^{q(n-k)} \right) y(\xi), & |\xi| < \hat{\sigma}_\delta, \\ 0, & |\xi| \geq \hat{\sigma}_\delta, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4), в котором положим $\widehat{\lambda}_2 = s^{-q(n-k)}$, где параметр $s \leq \sigma$ определим позже. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-s}^s \left(|\xi|^{kq} - \frac{|\xi|^{nq}}{s^{q(n-k)}} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\xi \right)^{1/p} \\ &= \delta \left(\int_{-s}^s |\xi|^{nq} \left(|\xi|^{kq} - \frac{|\xi|^{nq}}{s^{q(n-k)}} \right)^{\frac{q}{p-q}} d\xi \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Сделав замену $\xi = su$, получим уравнение

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 u^{\frac{kpq}{p-q}} (1 - u^{q(n-k)})^{\frac{p}{p-q}} du \right)^{1/p} \\ &= 2^{\frac{1}{q}} s^{\frac{1}{q}+n} \left(\int_0^1 u^{nq+\frac{kq^2}{p-q}} (1 - u^{q(n-k)})^{\frac{q}{p-q}} du \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к B -функциям, сделаем замену $t = u^{(n-k)q}$. Получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2s}{q(n-k)} \right)^{\frac{1}{p}} B^{1/p} \left(\frac{k+1/q-1/p}{(n-k)(1-q/p)}, \frac{2-q/p}{1-q/p} \right) \\ &= \delta s^n \left(\frac{2s}{q(n-k)} \right)^{\frac{1}{q}} B^{1/q} \left(\frac{k+1/q-1/p}{(n-k)(1-q/p)} + 1, \frac{2-q/p}{1-q/p} - 1 \right). \end{aligned}$$

Пользуясь известным равенством

$$B(a+1, b-1) = \frac{a}{b-1} B(a, b),$$

находим, что $s = \widehat{\sigma}_\delta$. Далее применяем теорему 1. \square

Отметим, что случай, когда $\sigma < \widehat{\sigma}_\delta$, требует более тонкого исследования. При $q = 2$ оно было проведено в работе [18], в которой также содержится утверждение доказанной теоремы для $q = 2$.

Пусть теперь $1 \leq p = q < r < \infty$, $1 \leq k < n$, $\sigma = +\infty$ и $\delta > 0$. Положим

$$\widehat{s}_\delta = \left(\left(\frac{2B_1}{p} \right)^{1/p-1/r} \frac{(n-k-1/p+1/r)^{1/p}}{\delta k^{2/p-1/r}} \right)^{\frac{1}{n-1/p+1/r}},$$

где

$$B_1 = B \left(\frac{n-k-1/p+1/r}{k(1-p/r)}, \frac{2-p/r}{1-p/r} \right).$$

Теорема 6. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$, $1 \leq p < r < \infty$, $\sigma = +\infty$ и $\delta > 0$. Тогда

$$E_{ppr} = \left(\frac{n-1/p+1/r}{n-k-1/p+1/r} \right)^{\frac{1}{p}} \widehat{s}_\delta^k \delta,$$

а метод $\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| < \widehat{s}_\delta, \\ (i\xi)^k (\widehat{s}_\delta/|\xi|)^{kp} y(\xi), & |\xi| \geq \widehat{s}_\delta, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (11), в котором положим $\widehat{\lambda}_1 = s^{kp}$, где параметр s определим позже. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{|\xi| \geq s} |\xi|^{\frac{np}{p-r}} (|\xi|^{kp} - s^{kp})^{\frac{p}{r-p}} d\xi \right)^{1/p} \\ &= \delta \left(\int_{|\xi| \geq s} |\xi|^{\frac{np}{p-r}} (|\xi|^{kp} - s^{kp})^{\frac{r}{r-p}} d\xi \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Сделав замену $\xi = s/u$, получим уравнение

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 u^{\frac{pr(n-k)}{r-p} + kp - 2} (1 - u^{kp})^{\frac{p}{r-p}} du \right)^{1/p} \\ &= 2^{\frac{1}{r}} s^{\frac{1}{r} + n} \left(\int_0^1 u^{\frac{pr(n-k)}{r-p} - 2} (1 - u^{kp})^{\frac{r}{r-p}} du \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к B -функциям, сделаем замену $t = u^{kp}$. Получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2s}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} B^{1/p} \left(\frac{n-k-1/p+1/r}{k(1-p/r)} + 1, \frac{2-p/r}{1-p/r} - 1 \right) \\ &= \delta s^n \left(\frac{2s}{kp} \right)^{\frac{1}{r}} B^{1/r} \left(\frac{n-k-1/p+1/r}{k(1-p/r)}, \frac{2-p/r}{1-p/r} \right). \end{aligned}$$

Отсюда $s = \widehat{s}_\delta$. Остается воспользоваться теоремой 2. \square

Рассмотрим случай, когда $1 \leq q < p = r < \infty$.

Теорема 7. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $1 \leq q < p < \infty$, $\sigma < +\infty$, $\delta > 0$ и \widehat{a} удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^\sigma (1 - \delta^p \xi^{np}) \left(\frac{\xi^{kq}}{\widehat{a} + \xi^{np}} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\xi \\ &= \frac{\delta^p (1/q - 1/p)}{\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}} (n-k-1/q+1/p)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$E_{pqp} = \left(2 \int_0^\sigma \frac{\xi^{\frac{kpq}{p-q}}}{(1 + \widehat{a}\xi^{np})^{\frac{p}{p-q}}} dt \right)^{1/q-1/p} (\widehat{a} + \delta^{-p})^{1/q} \delta,$$

а метод $\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} \frac{\widehat{a}(i\xi)^k}{\widehat{a} + |\xi|^{np}} y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

является оптимальным.

Доказательство. Уравнение (18) для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\int_0^\sigma \left(\frac{\xi^{kq}}{1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{np}} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\xi = \delta^p \int_0^\sigma \xi^{np} \left(\frac{\xi^{kq}}{1 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{np}} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\xi + \frac{\delta^p(1/q - 1/p)}{\widehat{\lambda}_2^{\frac{p}{p-q}} \sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}} (n-k-1/q+1/p)}.$$

Положив $a = \widehat{\lambda}_2^{-1}$, получим уравнение $f(a) = 0$, где

$$f(a) = \int_0^\sigma (1 - \delta^p \xi^{np}) \left(\frac{\xi^{kq}}{a + \xi^{np}} \right)^{\frac{p}{p-q}} d\xi - \frac{\delta^p(1/q - 1/p)}{\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}} (n-k-1/q+1/p)}.$$

Нетрудно убедиться, что $f(a) \rightarrow +\infty$ при $a \rightarrow 0$ и

$$f(a) \rightarrow -\frac{\delta^p(1/q - 1/p)}{\sigma^{\frac{n-k-1/q+1/p}{1/q-1/p}} (n-k-1/q+1/p)}$$

при $a \rightarrow +\infty$. В силу непрерывности функции (\cdot) существует значение $\widehat{a} > 0$, для которого $f(\widehat{a}) = 0$. Далее применяется теорема 3. \square

При $\sigma = +\infty$ можно явно решить уравнение (18). В этом случае имеет место следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $1 \leq q < p < \infty$, $\delta > 0$ и $\sigma = +\infty$. Тогда

$$E_{pqr} = \left(\frac{n}{n-K} \right)^{1/q} \left(\frac{2B_2}{np} \right)^{1/q-1/p} \left(\frac{n-K}{K} \right)^{\frac{K}{np}} \delta^{1-K/n},$$

где

$$K = k + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \quad B_2 = B \left(\frac{\frac{K}{n}q/p, 1 - \frac{K}{n}q/p}{1 - q/p, 1 - q/p} \right),$$

а метод $\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \frac{(i\xi)^k}{1 + \frac{K}{n-K} \delta^p |\xi|^{np}} y(\xi),$$

является оптимальным.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $1 < p = q = r < \infty$. В случае, когда $\sigma = +\infty$, а $\delta = 0$, задача восстановления становится тривиальной, т.к. известна вся информация о функции. Поэтому этот случай в дальнейшем исключен из рассмотрения. Положим при $k \geq 1$

$$\widehat{\sigma} = \begin{cases} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{p(n-k)}} \delta^{-1/n}, & \delta > 0, \\ +\infty, & \delta = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{n-k}{n} \delta^{-pk/n}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \sigma^{kp} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n}, & \sigma < \widehat{\sigma} \end{cases} \quad \lambda_2 = \begin{cases} \frac{k}{n} \delta^{p(n-k)/n}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \\ \sigma^{-p(n-k)}, & \sigma < \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

При $k = 0$ положим $\lambda_1 = 1$,

$$\lambda_2 = \begin{cases} \sigma^{-pn}, & \sigma < +\infty, \\ 0, & \sigma = +\infty. \end{cases}$$

Теорема 9. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$E_{ppp} = (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p}.$$

При этом методы $\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} \alpha(\xi)y(\xi), & |\xi| < \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

а $\alpha(\cdot)$ почти для всех $\xi \in \Delta_\sigma$ при $\delta > 0$, $\lambda_2 > 0$, удовлетворяют условию

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{|(i\xi)^k - \alpha(\xi)|^{p'}}{\lambda_2^{p'/p} |\xi|^{p'n}} + \frac{|\alpha(\xi)|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p}} \leq 1, & 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \\ \frac{|(i\xi)^k - \alpha(\xi)|}{\lambda_2 |\xi|^n} \leq 1, \quad \frac{|\alpha(\xi)|}{\lambda_1} \leq 1, & p = 1, \end{cases}$$

а при $1 \leq p < \infty$, $\delta = 0$, — условию

$$|(i\xi)^k - \alpha(\xi)| \leq \lambda_2^{1/p} |\xi|^n,$$

являются оптимальными. При $\lambda_2 = 0$ метод $\widehat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}y(\cdot)$ — оптимальный.

Доказательство. Экстремальная задача (23) имеет в этом случае вид

$$(31) \quad \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kp} |Fx(\xi)|^p d\xi \rightarrow \max, \quad \int_{\Delta_\sigma} |Fx(\xi)|^p d\xi \leq \delta^p,$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np} |Fx(\xi)|^p d\xi \leq 1.$$

Зададим в плоскости (u, v) кривую $v = u^{k/n}$ в параметрическом виде

$$(32) \quad \begin{cases} u = |\xi|^{np}, \\ v = |\xi|^{kp}, \end{cases} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Пусть $k \geq 1$, $\delta > 0$. Касательная к этой кривой в точке $u = \delta^{-p}$ имеет вид $v = \lambda_1 + \lambda_2 u$, где

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n} \delta^{-pk/n}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{n} \delta^{p(n-k)/n}.$$

В силу вогнутости кривой (32) для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$-|\xi|^{kp} + \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{np} \geq 0.$$

Если $\sigma \geq \hat{\sigma}$, то для всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$(33) \quad -|\xi|^{kp} + \lambda_1 \chi_\sigma(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{np} \geq 0,$$

где $\chi_\sigma(\cdot)$ — характеристическая функция Δ_σ .

Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \delta/\varepsilon^{1/p}, & \xi \in (\delta^{-1/n} - \varepsilon, \delta^{-1/n}), \\ 0, & \xi \notin (\delta^{-1/n} - \varepsilon, \delta^{-1/n}). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\Delta_\sigma} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p d\xi = \delta^p,$$

а

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon} \int_{\delta^{-1/n} - \varepsilon}^{\delta^{-1/n}} \xi^{np} d\xi \leq 1.$$

Таким образом, функция $x_\varepsilon(\cdot)$ является допустимой в (31) и, следовательно,

$$E_{ppp}^p \geq \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kp} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon} \int_{\delta^{-1/n} - \varepsilon}^{\delta^{-1/n}} \xi^{kp} d\xi.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$E_{ppp} \geq \delta^{1-k/n} = (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p}.$$

Если $k \geq 1$, $\delta \geq 0$ и $\sigma < \hat{\sigma}$, проведем касательную к кривой (32) в точке

$$u = \sigma^{np} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{n-k}}.$$

Она будет иметь вид $v = \lambda_1 + \lambda_2 v$, где

$$\lambda_1 = \sigma^{kp} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k}{n-k}} \frac{n-k}{n}, \quad \lambda_2 = \sigma^{-p(n-k)}.$$

В силу вогнутости кривой (32) и того, что при $|\xi| > \sigma$ $\lambda_2|\xi|^{pn} > \lambda_2|\xi|^{pk}$, неравенство (33) (с новыми λ_1 и λ_2) выполнено. Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ функцию $x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\cdot)$ такую, что

$$Fx_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi) = \begin{cases} \delta/\varepsilon_1^{1/p}, & \xi \in (\xi_0, \xi_0 + \varepsilon_1), \\ c^{1/p}, & \xi \in (\sigma, \sigma + \varepsilon_2), \\ 0, & \xi \notin (\xi_0, \xi_0 + \varepsilon_1) \cup (\sigma, \sigma + \varepsilon_2), \end{cases}$$

где

$$\xi_0 = \sigma \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{p(n-k)}},$$

а число c определим позже. Тогда

$$\int_{\Delta_\sigma} |Fx_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi)|^p d\xi = \delta^p,$$

а

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np} |Fx_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi)|^p d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \varepsilon_1} \xi^{np} d\xi + c \int_{\sigma}^{\sigma + \varepsilon_2} \xi^{np} d\xi.$$

При $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ и $\delta > 0$

$$\frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \varepsilon_1} \xi^{np} d\xi \rightarrow \delta^p \xi_0^{np} = \delta^p \sigma^{np} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{n-k}} < \delta^p \widehat{\sigma}^{np} \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{n}{n-k}} = 1.$$

Поэтому при $\delta \geq 0$, положив

$$c = \frac{1 - \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \varepsilon_1} \xi^{np} d\xi}{\int_{\sigma}^{\sigma + \varepsilon_2} \xi^{np} d\xi},$$

получим, что

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np} |Fx_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi)|^p d\xi = 1.$$

Тем самым функция $x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\cdot)$ является допустимой в (31) и, следовательно,

$$\begin{aligned} E_{ppp}^p &\geq \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{kp} |Fx_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi)|^p d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \varepsilon_1} \xi^{kp} d\xi \\ &\quad + \left(1 - \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \varepsilon_1} \xi^{np} d\xi \right) \frac{\int_{\sigma}^{\sigma + \varepsilon_2} \xi^{kp} d\xi}{\int_{\sigma}^{\sigma + \varepsilon_2} \xi^{np} d\xi}. \end{aligned}$$

Устремляя ε_1 и ε_2 к нулю, получаем

$$E_{ppp} \geq (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p}.$$

Пусть $k = 0$ и $\sigma < +\infty$. Тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sigma^{-pn}$. Легко проверить, что неравенство (33) выполняется и в этом случае. Рассмотрев ту

же функцию $x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ (с $\xi_0 = 0$), несложно показать, что она допустима в задаче (31). Поэтому

$$E_{ppp}^p \geq \int_{\mathbb{R}} |Fx_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(\xi)|^p d\xi = \delta^p + \left(1 - \frac{\delta^p}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1} \xi^{np} d\xi\right) \frac{\varepsilon_2}{\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon_2} \xi^{np} d\xi}.$$

Устремляя ε_1 и ε_2 к нулю, получаем

$$E_{ppp} \geq (\delta^p + \sigma^{-pn})^{1/p} = (\lambda_1 \delta^p + \lambda_2)^{1/p}.$$

Остается рассмотреть случай, когда $k = 0$, и $\sigma = +\infty$. Тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Неравенство (33) очевидным образом выполнено. Рассмотрим для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ такую, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \delta/\varepsilon^{1/p}, & \xi \in (0, \varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p d\xi = \delta^p,$$

а

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{np} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p d\xi = \frac{\delta^p}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \xi^{np} d\xi \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $x_\varepsilon(\cdot)$ допустима в задаче (31). Поэтому

$$E_{ppp}^p \geq \int_{\mathbb{R}} |Fx_\varepsilon(\xi)|^p d\xi = \delta^p = \lambda_1 \delta^p + \lambda_2.$$

Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 4. \square

Аналогично следствию 1 получаем

Следствие 2. При $k \geq 1$, $\delta > 0$, методы $\hat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| \leq \theta\sigma_0, \\ (i\xi)^k \alpha(\xi) y(\xi), & \theta\sigma_0 < |\xi| < \sigma_0, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

$$\theta = \left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{1}{kp}} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{p(n-k)}}, \quad \sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\},$$

а $\alpha(\cdot)$ удовлетворяют условиям (30) являются оптимальными. При $\delta = 0$ или $k = 0$ метод $\hat{m}(y)(\cdot) = F^{-1}Y_y(\cdot)$, где

$$Y_y(\xi) = \begin{cases} (i\xi)^k y(\xi), & |\xi| \leq \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases}$$

— оптимальный.

При $p = 2$ соответствующая задача о восстановлении производной на соболевском классе $W_2^n = F_2^n$ исследовалась в работе [16] (см. также [19]).

7. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙ

Если $T = \mathbb{N}$ и $\mu(\{j\}) = 1$, то соответствующее пространство $L_p(T, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, совпадает с пространством l_p , представляющим из себя совокупность векторов $x = (x_1, x_2, \dots)$ таких, что

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Положим

$$\mathcal{W}_p = \left\{ x \in l_p : \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j x_j|^p < \infty \right\},$$

$$W_p = \left\{ x \in \mathcal{W}_p : \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j x_j|^p \leq 1 \right\}.$$

Пусть задан оператор $\Lambda: \mathcal{W}_p \rightarrow l_p$

$$\Lambda x = (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \dots),$$

где последовательность $|\mu_j|/|\nu_j|$ для достаточно больших j ограничена (из этого условия вытекает, что $\Lambda x \in l_p$ для всех $x \in \mathcal{W}_p$).

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора T на множестве W_p по неточно заданным координатам x_1, \dots, x_N . Точнее, предполагается, что для любого $x \in W_p$ известен вектор $y = (y_1, \dots, y_N)$, $j = 1, \dots, N$, такой, что $\|I^N x - y\|_{l_p^N} \leq \delta$, где $I^N x = (x_1, \dots, x_N)$, а

$$\|x\|_{l_p^N} = \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

По вектору y надо восстановить наиболее точно значение Λx .

Под методами восстановления здесь понимаются всевозможные отображения $m: l_p^N \rightarrow l_p$. В соответствии с общей постановкой погрешностью метода называется величина

$$e_p(m) = \sup_{\substack{x \in W_p, y \in l_p^N \\ \|I^N x - y\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|\Lambda x - m(y)\|_{l_p}.$$

Погрешность оптимального восстановления определяется следующим образом

$$E_p = \inf_{m: l_p^N \rightarrow l_p} e_p(m),$$

а метод, на котором эта нижняя грань достигается, называется оптимальным.

Будем предполагать, что $\nu_j \neq 0$ для всех $j \geq N + 1$. Положим

$$\lambda = \sup_{j \geq N+1} \frac{|\mu_j|^p}{|\nu_j|^p},$$

$$M = \text{co}\{(0, 0) \cup \{(|\nu_j|^p, |\mu_j|^p)\}_{j \in \mathbb{N}}\} + \{(t, t\lambda) \mid t \geq 0\},$$

где $\text{co} \Omega$ — выпуклая оболочка множества Ω . Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по правилу: $\theta(t) = \max\{x \mid (t, x) \in M\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — вогнутая ломаная (см. рис. 1).

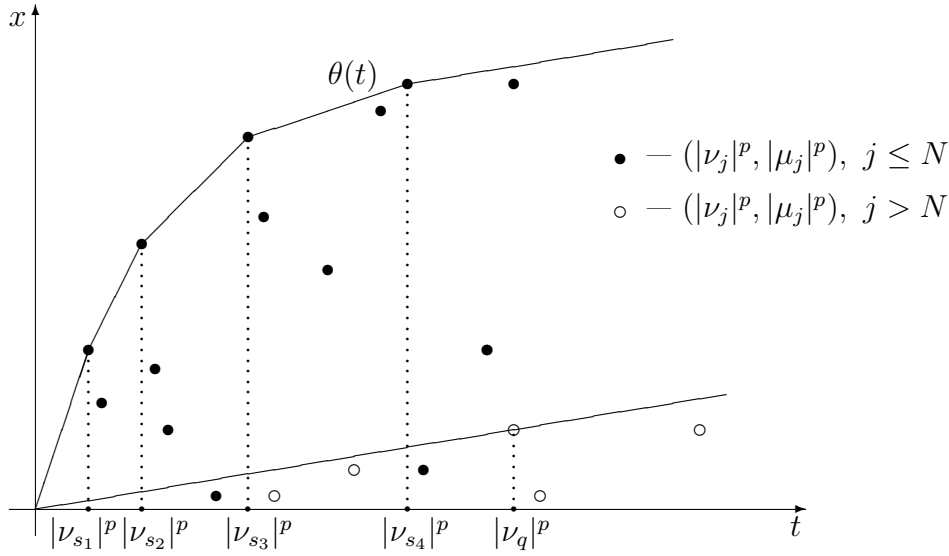


Рис. 1

Теорема 10. При всех $\delta > 0$

$$E_p = \delta \theta^{1/p}(\delta^{-p}).$$

Пусть $\delta > 0$ и δ^{-p} принадлежит тому промежутку на \mathbb{R}_+ , где $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то для всех α_j , $1 \leq j \leq N$, удовлетворяющих условию

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{|\mu_j - \alpha_j|^{p'}}{|\nu_j|^{p'} \lambda_2^{p'/p}} + \frac{|\alpha_j|^{p'}}{\lambda_1^{p'/p}} \leq 1, & 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \\ \frac{|\mu_j - \alpha_j|}{|\nu_j| \lambda_2} \leq 1, \quad \frac{|\alpha_j|}{\lambda_1} \leq 1, & p = 1, \end{cases}$$

методы

$$(35) \quad \hat{m}(y) = (\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_N y_N, 0, \dots)$$

являются оптимальными. Если $\lambda_1 = 0$, то $\hat{m}(y) = 0$ — оптимальный метод, а если $\lambda_2 = 0$, то

$$\hat{m}(y) = (y_1, \dots, y_N, 0, \dots)$$

— оптимальный метод. Если $\delta = 0$, то $E_p = \lambda^{1/p}$ и все методы (35), в которых

$$|\mu_j - \alpha_j| \leq |\nu_j| \lambda^{1/p},$$

являются оптимальными.

Доказательство. Экстремальная задача (23) в рассматриваемом случае имеет вид

$$(36) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j x_j|^p \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^N |x_j|^p \leq \delta^p, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_j x_j|^p \leq 1.$$

В силу определения множества M и функции $\theta(\cdot)$, если на каком-нибудь из промежутков ломаная $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$, то $\lambda_1 \geq 0$, $0 \leq \lambda_2 \leq \lambda$ и при всех $j \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$-|\mu_j|^p + \lambda_1 \chi_j + \lambda_2 |\nu_j|^p \geq 0,$$

где

$$\chi_j = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq N, \\ 0, & j > N. \end{cases}$$

Пусть $0 < |\nu_{s_1}|^p < \dots < |\nu_{s_k}|^p$ — аргументы точек излома ломаной $\theta(\cdot)$. Предположим, что $|\nu_{s_{l-1}}| \leq \delta^{-1} < |\nu_{s_l}|$ при некотором l , $1 < l \leq k$, а функция $\theta(\cdot)$ при $|\nu_{s_{l-1}}|^p \leq t \leq |\nu_{s_l}|^p$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Положим $\hat{x}_j = 0$, $j \neq s_{l-1}, s_l$,

$$\hat{x}_{s_{l-1}} = \left(\frac{\delta^p |\nu_{s_l}|^p - 1}{|\nu_{s_l}|^p - |\nu_{s_{l-1}}|^p} \right)^{1/p}, \quad \hat{x}_{s_l} = \left(\frac{1 - \delta^p |\nu_{s_{l-1}}|^p}{|\nu_{s_l}|^p - |\nu_{s_{l-1}}|^p} \right)^{1/p}.$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\hat{x}_{s_l}|^p &= \delta^p, \\ |\nu_{s_{l-1}} \hat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\nu_{s_l} \hat{x}_{s_l}|^p &= 1, \end{aligned}$$

$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots)$ является допустимым элементом в задаче (36). Тем самым значение этой задачи оценивается снизу величиной

$$(37) \quad |\mu_{s_{l-1}}|^p |\hat{x}_{s_{l-1}}|^p + |\mu_{s_l}|^p |\hat{x}_{s_l}|^p = \lambda_1 \delta^p + \lambda_2.$$

Предположим теперь, что $\delta^{-1} < \nu_{s_1}$. Если существует $\nu_j = 0$, $j \in \mathbb{N}$, то, выбрав s_0 из условия $\theta(0) = |\mu_{s_0}|^p$, $\nu_{s_0} = 0$, те же рассуждения, что и выше, проведенные для $l = 1$, доказывают равенство (37), где λ_1 и λ_2 таковы, что функция $\theta(\cdot)$ на отрезке $[0, |\nu_{s_1}|^p]$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Если $\nu_j > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $\lambda_1 = 0$ и $\theta(t) = \lambda_2 t$ при $t \in [0, |\nu_{s_1}|^p]$. Тогда положим $\hat{x}_j = 0$, $j \neq s_1$, а $\hat{x}_{s_1} = 1/\nu_{s_1}$. Нетрудно убедиться, что \hat{x} является допустимым элементом в задаче (36). Следовательно, ее значение оценивается снизу величиной

$$|\mu_{s_1}|^p |\hat{x}_{s_1}|^p = \lambda_2.$$

Пусть теперь $\delta \leq |\nu_{s_k}|^{-1}$, а $\theta(\cdot)$ на промежутке $[|\nu_{s_k}|^p, +\infty)$ имеет вид $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$. Ясно, что $\lambda_2 = \lambda$, т.к. $|\nu_{s_k}|^p$ — последняя точка излома $\theta(\cdot)$. Из определения λ вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $s_{k+1} \geq N + 1$ такое, что

$$(38) \quad \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p} > \lambda - \varepsilon.$$

Положим $\hat{x}_j = 0$, $j \neq s_k, s_{k+1}$, а \hat{x}_{s_k} и $\hat{x}_{s_{k+1}}$ выберем так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{s_k}|^p &= \delta^p, \\ |\nu_{s_k} \hat{x}_{s_k}|^p + |\nu_{s_{k+1}} \hat{x}_{s_{k+1}}|^p &= 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что \hat{x} является допустимым элементом в задаче (36). Следовательно, ее значение оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned} |\mu_{s_k}|^p |\hat{x}_{s_k}|^p + |\mu_{s_{k+1}}|^p |\hat{x}_{s_{k+1}}|^p &= \lambda_1 \delta^p + \lambda_2 - \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p} \right) (1 - \delta^p |\nu_{s_k}|^p) \\ &\geq \lambda_1 \delta^p + \lambda_2 - \varepsilon (1 - \delta^p |\nu_{s_k}|^p). \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что значение задачи (36) оценивается снизу величиной $\lambda_1 \delta^p + \lambda_2$.

Предположим теперь, что изломов нет. Тогда $\theta(\cdot)$ является прямой $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$ на \mathbb{R}_+ . Очевидно, что в этом случае $\lambda_2 = \lambda$. Для построения вектора \hat{x} рассмотрим два случая. Пусть сначала существует s_0 такое, что $\nu_{s_0} = 0$ и $\theta(0) = |\mu_{s_0}|^p$. Тогда положим $\hat{x}_j = 0$, $j \neq s_0, s_{k+1}$, а \hat{x}_{s_0} и $\hat{x}_{s_{k+1}}$ выберем так, чтобы удовлетворялись равенства

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{s_0}|^p &= \delta^p, \\ |\nu_{s_{k+1}} \hat{x}_{s_{k+1}}|^p &= 1 \end{aligned}$$

(здесь s_{k+1} то же, что и в (38)). Тогда значение задачи (36) оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned} |\mu_{s_0}|^p |\hat{x}_{s_0}|^p + |\mu_{s_{k+1}}|^p |\hat{x}_{s_{k+1}}|^p &= \\ \lambda_1 \delta^p + \lambda_2 - \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p} \right) &> \lambda_1 \delta^p + \lambda_2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Если же $\theta(0) = 0$ (в этом случае $\lambda_1 = 0$), положим $\hat{x}_j = 0$, $j \neq s_{k+1}$, а $\hat{x}_{s_{k+1}} = 1/\nu_{s_{k+1}}$. Тогда значение оценивается величиной

$$|\mu_{s_{k+1}}|^p |\hat{x}_{s_{k+1}}|^p = \lambda_2 + \left(\lambda - \frac{|\mu_{s_{k+1}}|^p}{|\nu_{s_{k+1}}|^p} \right) > \lambda_2 - \varepsilon.$$

Следовательно, из-за произвольности $\varepsilon > 0$ и в том, и в другом случаях получается оценка $\lambda_1 \delta^p + \lambda_2$.

Применение теоремы 4 завершает доказательство. \square

Отметим, что в точках излома ломаной $\theta(\cdot)$ $(|\nu_{s_l}|^p, |\mu_{s_l}|^p)$, $l = 1, \dots, k$, существует много опорных прямых к множеству M . Можно показать, что при $\delta = |\nu_{s_l}|^{-1}$ для всякой такой опорной прямой $\lambda_1 + \lambda_2 t$, для которой $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, все методы (35), в которых α_j , $j = 1, \dots, N$, удовлетворяют условию (34) являются оптимальными.

Следствие 3. Пусть δ^{-p} принадлежит промежутку \mathbb{R}_+ , на котором $\theta(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t$, и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Положим

$$D = \{j : |\mu_j|^p > |\nu_j|^p \lambda_2, 1 \leq j \leq N\}, \quad D_0 = \{j \in D : |\mu_j|^p \leq \lambda_1\}.$$

Тогда методы

$$\{\widehat{m}(y)\}_j = \begin{cases} \mu_j y_j, & j \in D_0, \\ \alpha_j y_j, & j \in D \setminus D_0, \\ 0, & \mathbb{N} \setminus D, \end{cases}$$

где α_j удовлетворяют условиям (34), являются оптимальными.

Из следствия 3 вытекает, что полезная информация о неточно заданном векторе x содержат координаты x , номера которых входят в множество D . При этом для номеров из множества D_0 можно применять метод, который действует на координаты так же, как и восстанавливаемый оператор. Вид множеств D и D_0 показан на рис. 2.

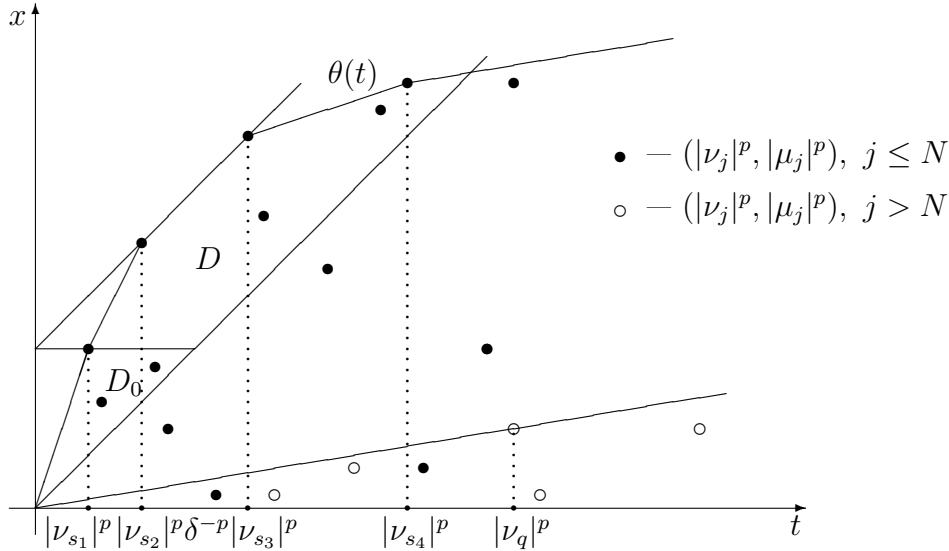


Рис. 2

Решение рассмотренной задачи восстановления в евклидовом случае при некоторых дополнительных условиях на μ_j и ν_j было получено в работе [15], а в более общей ситуации, но снова в рамках

евклидоваго случая в работе [20] (и в том, и в другом случаях без получения семейства методов).

Применим теперь полученные в теореме 10 результаты к примеру из работы [6, теорема 12]. В этом примере $\mu_j = 1$, $j \in \mathbb{N}$ (в действительности, в [6] рассматривались последовательности на \mathbb{Z} , но это не является существенным). Положим

$$B = \min_{1 \leq j \leq N} |\nu_j|, \quad A = \inf_{j > N} |\nu_j|, \quad C = \frac{B}{A}$$

(будем считать, что $A > 0$, т.к. в противном случае $E_p = +\infty$). Для введенной ранее величины λ имеем $\lambda = 1/A^p$.

Из теоремы 10 получаем

Теорема 11.

1. При $\delta = 0$ $E_p = 1/A$ и все методы (35), в которых

$$|1 - \alpha_j| \leq |\nu_j|/A, \quad j = 1, \dots, N,$$

являются оптимальными.

2. При $C = 0$ $\theta(t) = 1 + t/A^p$, $E_p = (\delta^p + A^{-p})^{1/p}$ и все методы (35), в которых

$$\begin{cases} \frac{A^{p'}}{|\nu_j|^{p'}} |1 - \alpha_j|^{p'} + |\alpha_j|^{p'} \leq 1, & 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \\ |1 - \alpha_j| \leq |\nu_j|/A, \quad |\alpha_j| \leq 1, & p = 1, \end{cases}$$

являются оптимальными.

3. При $0 < C < 1$ и $\delta^{-1} \geq B$ $\theta(t) = 1 - C^p + t/A^p$,

$$E_p = (\delta^p(1 - C^p) + A^{-p})^{1/p}$$

и все методы (35), в которых

(39)

$$\begin{cases} \frac{A^{p'}}{|\nu_j|^{p'}} |1 - \alpha_j|^{p'} + \frac{|\alpha_j|^{p'}}{(1 - C^p)^{p'/p}} \leq 1, & 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \\ |1 - \alpha_j| \leq |\nu_j|/A, \quad |\alpha_j| \leq (1 - C), & p = 1, \end{cases}$$

являются оптимальными.

4. При $C \geq 1$ $\theta(t) = t/A^p$, $E_p = 1/A$, а при $0 < C < 1$ и $\delta^{-1} \leq B$ $\theta(t) = t/B^p$, $E_p = 1/B$ и метод $\hat{m}(y) = 0$ является оптимальным.

В [6] найдены следующие значения коэффициентов α_j : 1, 2. $\alpha_j = 1$; 3. $\alpha_j = 1 - C^p$; 4. $\alpha_j = 0$.

Выясним теперь при каких j можно положить $\alpha_j = 0$ и $\alpha_j = 1$. Положим

$$N_1 = \{j \in \{1, \dots, N\} : |\nu_j| < A\}.$$

Следствие 4. 1. При $\delta = 0$ или $C = 0$ метод (35), в котором

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & j \in N_1, \\ 0, & j \notin N_1, \end{cases}$$

— оптимальный.

2. При $0 < C < 1$ и $\delta^{-1} \geq B$ все методы (35) в которых при $j \in N_1$ α_j удовлетворяют условию (39), а при $j \notin N_1$ $\alpha_j = 0$, являются оптимальными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смоляк С. А. *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.
- [2] Бахвалов Н. С. “Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций”, *ЖВМ и МФ*, **11:4** (1971), 1014–1018.
- [3] Осипенко К. Ю. “Оптимальная интерполяция аналитических функций”, *Матем. заметки*, **12:4** (1972), 465–476.
- [4] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. “Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **17:3** (1975), 359–368.
- [5] Осипенко К. Ю. “Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек”, *Матем. заметки*, **19:1** (1976), 29–40.
- [6] Micchelli C. A., Rivlin T. J. “A survey of optimal recovery”. In: *Optimal Estimation in Approximation Theory* (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press, New York, 1977, 1–54.
- [7] Арестов В. В. “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, **189** (1989), 3–20.
- [8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50:6** (1991), 85–93.
- [9] Traub J. F., Woźniakowski H. *A General Theory of Optimal Algorithms*, New York: Academic Press, 1980.
- [10] Plaskota L. *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge University Press, 1996.
- [11] Osipenko K. Yu. *Optimal Recovery of Analytic Functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.
- [12] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения*, М.: Эдиториал УРСС, 2003.
- [13] Magaril-Ilyayev G. G., Tichomirov V. M. *Convex Analysis: Theory and Applications*, Translations of Math. Monographs, vol. 222, AMS, Providence, RI, 2003.
- [14] Melkman A. A., Micchelli C. A. “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16** (1979) 87–105.
- [15] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193:3** (2002), 79–100.
- [16] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.
- [17] Осипенко К. Ю., “Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197:3** (2006), 15–34.

- [18] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67.
- [19] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля и восстановление производных по неточной информации”, *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302.
- [20] Выск Н. Д., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815.

МАТИ — РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ИМ. А. А. ХАРКЕВИЧА РАН