ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПО ИХ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К. Ю. Осипенко

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН

kosipenko@yahoo.com

0.1 Введение

При изучении численных методов мы сталкиваемся с огромным числом алгоритмов. Например, для вычисления интеграла от функции по ее значениям в точках существует множество квадратурных формул. Для интерполяции функции по ее значениям в точках можно тоже применять различные методы: кусочно-линейная интерполяция, интерполяция сплайнами, наконец, можно воспользоваться интерполяционным многочленом Лагранжа. Как разобраться в этом множестве методов? Можно ли выбрать в каком-то смысле наилучший метод?

Как правило, при построении численного метода используются те или иные (часто довольно естественные) идеи, а затем исследуется полученный метод: выясняется его сходимость, устойчивость по отношению к неточным исходным данным и т.д. Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все (!) возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной — как же перебрать все методы? Наша цель — показать, что во многих случаях такая постановка позволяет дойти до конкретных методов.

0.2 Постановка задачи оптимального восстановления

Предположим нам надо решить некоторую задачу. Обозначим ее через p. Как правило, у нас есть некоторая исходная информация об этой задаче, которая может быть неполной и неточной. Будем обозначать ее через Ip. Предположим также, что у нас есть некоторый метод (алгоритм) для решения этой задачи m. Чтобы иметь возможность сравнивать различные методы, мы должны сопоставить каждому методу некоторое число, называемое погрешность решения для данного метода. Будем его обозначать через $e(p, I, m)$.

Обычно мы хотели бы, чтобы данный метод был применим не к одной задаче, а к целому множеству задач P подобного типа. Тогда погрешностью данного метода m на этом множестве естественно назвать величину

$$e(P, I, m) = \sup_{p \in P} e(p, I, m).$$

Если мы хотим найти хороший метод для решения множества задач P, то надо искать его таким, чтобы величина $e(P, I, m)$ была как можно меньше. Пусть M — множество допустимых методов. Тогда метод $\widehat{m}$ такой, что

$$e(P, I, \widehat{m}) = \inf_{m \in M} e(P, I, m) = E(P, I, M),$$

будет называться оптимальным методом восстановления, а величина $E(P, I, M)$ — погрешностью оптимального восстановления.

Еще один тип задач возникает, когда имеется возможность выбирать тип исходной информации о решаемых задачах. Конечно, при увеличении объема исходной информации следует ожидать более точного решения задач. Однако это ведет к все большим затратам, направленным на получение исходной информации. Поэтому, как правило, фиксируют объем исходной информации (например, число данных измерений) и сравнивают получаемые погрешности при различных типах исходной информации. Тем самым приходят к следующей задаче о нахождении информации оптимального типа

$$E(P, \mathcal{I}, M) = \inf_{I \in \mathcal{I}} E(P, I, M),$$

где $\mathcal{I}$ — множество возможных типов исходной информации.

0.3 Восстановление сигналов по точному спектру

Теперь займемся задачей о восстановлении периодической функции по ее набору коэффициентов Фурье. Ясно, что если эти коэффициенты измеряются с ошибкой, то не нужно брать их слишком много.

Но даже если берется некоторый конечный набор точно измеренных коэффициентов Фурье, оказывается, что они не все нужны. С этого примера, в котором не вся точно измеренная информация является полезной, мы и начнем.

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность 2π-периодических функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ — пространство абсолютно непрерывных 2π-периодических функций, для которых $x'(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$. Через $W_2^1(\mathbb{T})$ будем обозначать класс функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le 1$. Пусть о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ мы располагаем следующей информацией: нам известен конечный набор ее коэффициентов Фурье

$$a_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)\cos kt\,dt, \quad k \in A,$$
$$b_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)\sin kt\,dt, \quad k \in B,$$

где $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$, а $B \subset \mathbb{N}$. По этой информации мы хотим найти наилучший способ восстановления в метрике $L_2(\mathbb{T})$ функции $x(\cdot)$ сразу для всех функций $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$.

В это вкладывается следующий смысл. В качестве методов восстановления рассматриваются произвольные отображения

$$m\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow L_2(\mathbb{T}), \quad N = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$$

($\operatorname{card} M$ — число элементов в множестве M). *Погрешностью* данного метода m называется величина

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, m) = \sup_{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T})} \|x(\cdot) - m(I_{A,B}x)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где $I_{A,B}x = (\{a_k(x)\}_{k\in A}, \{b_k(x)\}_{k\in B})$. Нас интересует величина

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, m),$$

называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т.е. такой метод $\widehat{m}$, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \widehat{m}).$$

Положим

$$k_a = \min_{k\in\mathbb{N}\setminus A} k, \quad k_b = \min_{k\in\mathbb{N}\setminus B} k, \quad k_0 = \min\{k_a, k_b\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 *Если* $0 \notin A$, *то* $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \infty$. *Если* $0 \in A$, *то*

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \frac{1}{k_0}$$

и методы

$$m(I_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) + \sum_{k\in A_1} a_k\cos kt + \sum_{k\in B_1} b_k\sin kt, \quad (1)$$

являются оптимальными.

Уже здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда оптимальных методов много. Возникает вопрос, какой из оптимальных методов выбрать. Один из естественных способов — выбирать метод, который использует наименьшее количество исходных данных (в нашем случае - коэффициентов Фурье). По этому критерию из множества методов (1) следует выбрать метод

$$\widehat{m}(I_{A,B}x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1}(a_k\cos kt + b_k\sin kt).$$

После выбора данного метода все остальные измеренные коэффициенты Фурье оказываются лишними (они не используются оптимальным методом $\widehat{m}$). Тем не менее, если у нас есть возможность измерить фиксированное число коэффициентов Фурье, какие лучше всего измерять, чтобы погрешность оптимального восстановления была минимальной. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2 *При всех* $N \in \mathbb{N}$

$$\inf_{\operatorname{card} A + \operatorname{card} B \le 2N-1} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \inf_{\operatorname{card} A + \operatorname{card} B \le 2N} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}) = \frac{1}{N},$$

причем нижняя грань достигается для

$$A = \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad B = \{1, \dots, N-1\}.$$

0.4 Восстановление функции по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью

Рассмотрим теперь задачу восстановления функции на том же классе $W_2^1(\mathbb{T})$, когда вместо точных значений коэффициентов Фурье известны их приближенные значения $\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}$ и $\{\widetilde{b}_k\}_{k\in B}$ такие, что

$$|a_k(x) - \widetilde{a}_k| \le \delta, \ k \in A, \quad |b_k(x) - \widetilde{b}_k| \le \delta, \ k \in B.$$

В этом случае *погрешностью* метода m называется величина

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^N \\ \|I_{A,B}x - y|_{l_\infty^N} \le \delta}} \|x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})},$$

где l_∞^N — векторы $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, $N = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$, с нормой

$$\|y\|_{l_\infty^N} = \max_{1\le j\le N} |y_j|.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \inf_{m\colon l_\infty^N \longrightarrow L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta, m),$$

а метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, будем попрежнему называть *оптимальным методом восстановления.*

Положим

$$p_0 = \max\left\{p : 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p} k^2 < 1,\ 0 \le p \le k_0 - 1\right\}.$$

Теорема 3 *Если $0 \notin A$, то $E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \infty$. Если $0 \in A$, то*

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) = \frac{1}{p_0+1}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}(p_0+1)(8p_0^2+13p_0+3)},$$

а метод

$$\widehat{m}((\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B}))(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0}\left(1 - \frac{k^2}{(p_0+1)^2}\right)(\widetilde{a}_k\cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt)$$

является оптимальным.

Здесь в оптимальном методе пришлось отбрасывать часть исходной информации и сглаживать оставшиеся данные — умножать их на величины

$$1 - \frac{k^2}{(p_0+1)^2},$$

которые убывают с ростом k, т.е. чем больше частота, тем сильнее соответствующую гармонику надо сглаживать.

Но, может быть, можно было обойтись и без этого, воспользовавшись "естественным" методом

$$m((\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B}))(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k\in A}\widetilde{a}_k\cos kt + \sum_{k\in B}\widetilde{b}_k\sin kt?$$

У этого метода на функции $p^{-1}\cos pt \in W_2^1(\mathbb{T})$ при

$$p \geq \max_{k\in A\cup B} k$$

и $\widetilde{a}_k = \delta$, $k \in A$, $\widetilde{b}_k = \delta$, $k \in B$, квадрат погрешности равен величине

$$\frac{\delta^2}{2} + \delta^2(\operatorname{card} A + \operatorname{card} B) + \frac{1}{p^2},$$

которая неограниченно возрастает при увеличении исходных данных.

Если отбросить лишние данные, но не сглаживать оставшиеся, т.е. воспользоваться методом

$$m_0((\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B}))(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0}(\widetilde{a}_k\cos kt + \widetilde{b}_k\sin kt),$$

то квадрат погрешности такого метода на функции

$$\frac{1}{(p_0+1)}\cos(p_0+1)t \in W_2^1(\mathbb{T})$$

при $\widetilde{a}_k = \delta$, $k = 0, 1, \ldots, p_0$, $\widetilde{b}_k = \delta$, $k = 1, \ldots, p_0$, $\widetilde{a}_k = \widetilde{b}_k = 0$, $k > p_0$, равен величине

$$\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{1}{(p_0+1)^2},$$

что больше величины

$$\|\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 p_0 + \frac{1 - 2\delta^2 \sum\limits_{k=0}^{p_0} k^2}{(p_0+1)^2}.$$

Тем самым метод m_0 не является оптимальным.

Положим

$$N_\delta = \max\left\{p : 2\delta^2 \sum_{k=0}^{p} k^2 < 1,\ p \ge 0\right\}.$$

Аналогом теоремы 2 является

Теорема 4 *При всех $N \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}\inf_{\operatorname{card} A + \operatorname{card} B \le 2N-1} & E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) \\ &= \inf_{\operatorname{card} A + \operatorname{card} B \le 2N} E(W_2^1(\mathbb{T}), I_{A,B}, \delta) \\ &= \frac{1}{\widehat{N}_\delta + 1}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{6}(\widehat{N}_\delta + 1)(8\widehat{N}_\delta^2 + 13\widehat{N}_\delta + 3)},\end{aligned}$$

где $\widehat{N}_\delta = \min\{N_\delta, N-1\}$, причем нижняя грань достигается для

$$A = \{0, 1, \ldots, \widehat{N}_\delta\}, \quad B = \{1, \ldots, \widehat{N}_\delta\}.$$

Ряд общих результатов о восстановлении функций и их производных по неточно заданному спектру можно найти в работах [1] и [2] (см. также обзорную статью [3]).

Литература

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прилож.*, **37** (2003), 51–64.

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление операторов по неточной информации. Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. ”Исследования по выпуклому анализу”, Владикавказ, 2009, с. 158–192.