УДК 517.27, 517.51, 519.65, 517.86, 517.95, 517.97, 517.98

ОБ ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПОСЛЕДНЕГО ВРЕМЕНИ СОТРУДНИКОВ КАФЕДРЫ ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Васильева[1], А. В. Горшков[2], М. П. Заплетин[3], Л. В. Локуциевский[4], Г. Г. Магарил-Ильяев[5], К. Ю. Осипенко[6], К. С. Рютин[7], А. В. Фурсиков[8]

В статье приводится обзор основных научных результатов, полученных сотрудниками кафедры общих проблем управления в последние годы.

Ключевые слова: экстремальные задачи, теория приближений, восстановление, оптимальное управление.

In this paper we survey recent results obtained by the staff of the Chair of General Problems of Control.

Key words: extremal problems, approximation theory, recovery, optimal control.

1. Введение. Научные интересы сотрудников кафедры общих проблем управления (ОПУ) широки и разнообразны. Они связаны с задачами общей теории экстремума, теории управления, теории приближений, с задачами обтекания жидкостью ограниченного тела, задачами оптимального восстановления и многими другими. Ряд вопросов, относящихся к указанной тематике, обсуждается в этом обзоре. Нижеследующий текст состоит из разделов, каждый из которых написан одним из сотрудников кафедры ОПУ. Разделы расположены в алфавитном порядке фамилий их авторов.

2. Поперечники по Колмогорову. Раздел подготовлен А.А. Васильевой. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность всех подпространств в X размерности не выше

[1] *Васильева Анастасия Андреевна* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru.

Vasilieva Anastasia Andreevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[2] *Горшков Алексей Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gorshkov_alexey@mail.ru.

Gorshkov Alexey Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[3] *Заплетин Максим Петрович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zapletin_m@mail.ru.

Zapletin Maxim Petrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[4] *Локуциевский Лев Вячеславович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: lion.lokut@gmail.com.

Lokucievskii Lev Vyacheslavovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[5] *Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgii.magaril@math.msu.ru.

Magaril-Ilyaev Georgii Georgievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[6] *Осипенко Константин Юрьевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kosipenko@yahoo.com.

Osipenko Konstantin Yurevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[7] *Рютин Константин Сергеевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kriutin@yahoo.com.

Ryutin Konstantin Sergeevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Problems of Control.

[8] *Фурсиков Андрей Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. каф. общих проблем управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: fursikov@gmail.com.

Fursikov Andrei Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of General Problems of Control.

n. Колмогоровским n-поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M,\, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Пусть $m,\, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$. Через $l_{p,\theta}^{m,k}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой $\|(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant k}\|_{l_{p,\theta}^{m,k}} = \Big(\sum\limits_{j=1}^{k}\Big(\sum\limits_{i=1}^{m}|x_{i,j}|^p\Big)^{\theta/p}\Big)^{1/\theta}$. Для $p = \infty$ или $\theta = \infty$ определение модифицируется естественным образом. Через $B_{p,\theta}^{m,k}$ обозначим единичный шар пространства $l_{p,\theta}^{m,k}$. В случае $k = 1$ пространство и единичный шар будем обозначать соответственно через l_p^m и B_p^m.

Порядковые оценки величин $d_n(B_p^N,\, l_q^N)$ с точностью до мультипликативных констант, зависящих только от q, известны для $1 \leqslant q < \infty$ и произвольных p, а также для $q = \infty$ и $p \geqslant 2$ (при $p \geqslant q$ и $p = 1$, $q = 2$ вычислены точные значения)(историю вопроса и библиографию см., например, в [1]).

Э.М. Галеевым [2] были получены порядковые оценки $d_n(\cap_{\alpha\in A}\nu_\alpha B_{p_\alpha}^N,\, l_q^N)$ при $N = 2n$ (здесь $\nu_\alpha > 0$, $\alpha \in A$). Этот результат распространен А.А. Васильевой на случай $N \geqslant 2n$. Показано, что оценка поперечника пересечения шаров сводится к вычислению инфимума множества величин вида $\nu d_n(B_p^N, l_q^N)$. Точная формулировка результата приведена в [3] и [4; предложение 1]; отметим, что предложение 1 из [4] нетрудно распространить на случай произвольного A, рассуждая так же, как в [5, §5]. Полученный результат позволяет распространить теорему Э.М. Галеева [6] об оценках поперечников конечного пересечения классов Соболева на одномерном торе на случай малой гладкости при $q > 2$ (см. [5]).

Кроме того, получены порядковые оценки $d_n(\cap_{\alpha\in A}\nu_\alpha B_{p_\alpha,\theta_\alpha}^{m,k},\, l_{q,\sigma}^{m,k})$ для $2 \leqslant q,\, \sigma < \infty$, $n \leqslant \frac{mk}{2}$; обозначения и формулировка результата приведены в [5].

3. О задаче обтекания. А.В. Горшков исследовал двумерную задачу обтекания несжимаемой жидкостью ограниченного тела с условием прилипания на границе, динамика которой описывается нелинейным вихревым уравнением (уравнение Гельмгольца). Основной задачей было построение граничного условия прилипания в вихревой форме и доказательство разрешимости во внешней области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Начально-краевая задача с условием прилипания на границе области в вихревом представлении переходит в интегральные соотношения, заданные на всей внешности ограниченного тела. Эти соотношения являются условиями ортогональности функции ротора гармоническим функциям. Для внешности односвязной области с заданным горизонтальным потоком на бесконечности $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$ эти условия на вихревую функцию w имеют вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{w(x)}{\Phi(z)^k}dx = \begin{cases} 0,\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ k \neq 1; \\ iv_\infty,\ k = 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Phi(z)$ — отображение Римана из Ω на внешность круга вида $\Phi(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$.

Задача восстановления соленоидального векторного поля $\mathbf{v}$ по вихревой функции w (в англоязычной литературе она называется div-curl problem) имеет единственное решение с точностью до гармонических полей. Эти поля являются циркуляционными и обладают бесконечной кинетической энергией. Поскольку из условия ортогональности (1) при $k = 0$ следует, что среднее ротора равняется нулю, то согласно формуле Стокса при выполнении условия прилипания у течения будет отсутствовать циркуляция на бесконечности. Этот факт позволяет получать уже среднеквадратические оценки для векторного поля. Доказаны однозначная разрешимость задачи дивергенция-ротор с условием прилипания и оценка $\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|w(\mathbf{x})(1+|\mathbf{x}|^2)^{N/2}\|_{L_2(\Omega)}$, справедливая при любом $N > 1$. Для линейных вихревых уравнений условия ортогональности (1), распределенные по всей бесконечной области Ω, можно свести к граничным, распределенным уже только по границе области $\partial\Omega$. Для внешности круга радиуса r_0 граничное условие прилипания в терминах коэффициентов Фурье $w_k(t,\cdot)$ вихревой функции $w(t,\cdot)$ будет иметь вид

$$r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k|w_k(t,r_0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Линейный оператор вихревого уравнения с таким краевым условием порождает вырожденное преобразование типа Фурье F, которое имеет одномерное ядро, с базисной функцией e_0 и для которого равенство Парсеваля приобретает вид $\|f\|^2 = \|F[f]\|^2 + (f, e_0)^2$, $F[e_0] = 0$.

С использованием этих граничных условий в работе автора [7] найдена явная формула решения системы Стокса обтекания кругового цилиндра в вихревой форме. В работе [8] построено схожее граничное условие для системы Навье–Стокса. Само преобразование F исследовано в [9].

4. Оптимизация траекторий космического аппарата. Создание и оптимизация современных финансовых инструментов и технологий. М.П. Заплетин занимается исследованием сложных задач траекторной оптимизации, требующих для своего решения синтеза методов локальной и многоэкстремальной оптимизации, оптимального управления, космодинамики, механики космического полета, небесной механики и численных методов. Поставлена трехмерная космодинамическая задача сквозной оптимизации траектории межпланетного перелета КА с единым функционалом, подробным рассмотрением планетоцентрических участков без использования грависфер нулевой протяженности, с комбинированной тягой и фазировкой. Предложена методика решения многоэкстремальных задач оптимизации траекторий межпланетных перелетов с возвратом к Земле, с учетом эфемерид, с жесткой фазировкой, ограниченной комбинированной большой и малой кусочно-непрерывной тягой, включающая решение серии вспомогательных задач в упрощенной постановке и продолжение решения по параметру. Разработаны численные методы решения краевых задач принципа максимума, возникающих при управлении совокупностью динамических систем, с учетом эффекта потери точности и перестройки структуры траектории при изменении количества активных участков во время продолжения решения по параметру. Результаты численного решения задач описаны в [10,11].

Также рассматривается серия задач оптимизации построения орбиты спутника дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), оценки плана и возможностей для съемки интересующей области на поверхности Земли. Приведена программа визуализации орбиты любого доступного коммерческого космического аппарата ДЗЗ в требуемый период времени, оценки и планировки съемки указанной территории определенным космическим аппаратом. Вычислительная часть программы основана на модели SGP4, использующей общедоступные данные TLE для спутников ДЗЗ, на формулах сферической тригонометрии и эвристических методах сокращения вычислений [12].

Проведены исследования, связанные с проработкой концепции дуальности товаров в части развития ее теоретических аспектов и математического аппарата с разработкой и обоснованием математического инструментария, позволяющего обрабатывать временные ряды с целью выявления свойства дуальности товара по отношению к выбранному товару (в частности, к золоту), а также с разработкой схем, алгоритмов и правил принятия решения в вопросе оценки дуальности товаров по отношению к выбранному товару. Результаты исследования дают возможность сформировать финансовый инструмент, который ложится в основу денежного обеспечения. Совокупность полученных научных результатов может быть использована при создании инвестиционного резервного контура, встраиваемого в существующую валютно-финансовую систему без конфликтов с международными обязательствами и регламентами, а также при построении расчетно-клиринговых систем международных союзов [13–17]. Монографии "Дуальные товары" [13] была присвоена премия "Экономическая книга года – 2023" в номинации "Монографии. Экономические исследования" Международным союзом экономистов (IUE).

5. Регулярность субримановых геодезических. Авторы раздела – Л.В. Локуциевский и М.И. Зеликин. Растущий интерес математиков к неголономным и субримановым задачам возник начиная с середины XX века в связи с работами знаменитых математиков, таких, как Э. Картан, М.Л. Громов, Р. Монтгомери, Дж. Митчел, А.М. Вершик, А.А. Аграчев, и многих других. Многие прикладные задачи: задачи кинематического управления, задачи управления квантовыми системами, задачи обработки изображений и другие естественно формулируются как задачи поиска субримановых геодезических. Наиболее таинственным и интригующим объектом в этой теории служат анормальные геодезические, возникающие как критические точки экспоненциального отображения (end-point map). С самого начала возникновения интереса к особым геодезическим встал вопрос о методах их исследования, и, в частности, до сих пор не разрешен до конца вопрос об их гладкости. Он не только имеет важное теоретическое значение, но и представляет большой практический интерес.

М.И. Зеликиным и Л.В. Локуциевским в 2023 г. получен первый результат о регулярности субримановых геодезических, не использующий никаких априорных предположений [18]. Доказано, что скорость на всякой субримановой геодезической обязана быть L_p-г ёльдеровой. Отметим, что результаты других авторов в этой области всегда опирались на те или иные весьма ограничительные априорные предположения о структуре субриманова многообразия или о самой геодезической.

Исследовать гладкость геодезических в римановой геометрии несложно: любая риманова геодезическая удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа и потому обязана быть гладкой (или даже аналитической). Субримановы геодезические не обязаны удовлетворять уравнению Эйлера–Лагранжа, вместо этого они подчиняются гамильтоновой системе включений принципа максимума Понтрягина. Если главная часть гамильтониана не вырождена, то соответствующая геодезическая называется нормальной, она удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа и потому обязана быть гладкой. Однако при попытке исследовать гладкость анормальных геодезических главная часть понтрягинского гамильтониана вырождается и дифференциальное включение не эквивалентно какому-либо обыкновенному дифференциальному уравнению. Некоторым исключением можно считать субримановы многообразия глубины $s = 2$, так как в этом случае согласно условию Гоха анормальные геодезические отсутствуют (см. [19]). Однако даже в случае $s = 3$ исследовать гладкость анормальных геодезических таким способом очень затруднительно (но в этом направлении есть ряд результатов [20]). На глубине $s = 4$ общих результатов уже почти нет (работа [21] являлась единственным исключением на начало 2023 г.).

В 2016 вышла работа [22], в которой доказан замечательный результат: субримановы анормальные геодезические не могут иметь углов. Характерно, что доказательство этого результата не опирается на принцип максимума Понтрягина, а получено с использованием совершенно других соображений. Формально этот результат никоим образом не контролирует гладкость геодезических. Тем не менее у него есть много интересных следствий. Например, в работе [23] доказано, что геодезические на трехмерных субримановых многообразиях независимо от глубины должны быть C^1-гладкими. Упомянутая выше работа [21] тоже опирается на результат об отсутствии углов.

Тем не менее к настоящему времени, несмотря на непрекращающиеся усилия многих ведущих математиков, не доказано, что анормальные геодезические на субримановых многообразиях в общем случае являются гладкими. Широко известны примеры [19, §12.6.1] анормальных экстремалей (но не геодезических) на субримановых многообразиях, которые не являются гладкими, но до сих пор не известно ни одного примера негладкой анормальной геодезической.

В работе Л.В. Локуциевского и М.И. Зеликина [18] на основе некоторой нетривиальной двойственной интерполяционной оценки на анормальное управление получен следующий результат.

Теорема. *На любом субримановом многообразии постоянного ранга любая геодезическая имеет L_p-гёльдерову производную для всякого $1 \leqslant p < \infty$.*

Таким образом, если негладкие анормальные геодезические и существуют, то лежат они в очень узком классе кривых, скорость на которых L_p-гельдерова с некоторым показателем $0 < \alpha \leqslant 1$, но при этом не является гладкой. При $\alpha > \frac{1}{p}$ этот класс вообще пуст. До 2023 г. попыток построить негладкую субриманову геодезическую именно в таком классе не предпринималось. В работе [18] приведена теорема, которая хоть и формулируется более громоздко, но дает количественную равномерную оценку показателя α на любом компакте, которая напрямую связана с глубиной s субриманова многообразия.

Помимо очевидного теоретического значения данный результат может быть использован для обоснования численных методов нахождения решений. А именно: в работе [18] получены два важных практических следствия: 1) доказана быстрая скорость убывания коэффициентов Фурье геодезических; 2) доказана полиномиальная эффективность приближения скорости на геодезических C^1-гладкими кривыми (например, сплайнами).

Одна из важнейших проблем квантовых вычислений связана с построением минимальных квантовых цепей — коротких последовательностей квантовых гейтов, реализующих с некоторой точностью заданный унитарный оператор на системе из n кубитов (в группе $SU(2^n)$). М. Нельсон и М. Доулинг (2006) доказали, что разложение унитарного оператора в последовательность гейтов можно эквивалентно рассматривать как нахождение кратчайшего пути в $SU(2^n)$, соединяющего единичный оператор с заданным в специальной римановой метрике на $SU(2^n)$, которая содержит некий "штрафной" параметр $p > 0$, связывающий длину пути и сложность квантовой цепи. Штрафной параметр должен быть очень велик, чтобы нивелировать неконтролируемую часть ошибки. При $p \to \infty$ указанные соображения приводят к субримановой задаче на группе $SU(2^n)$, геодезические в которой могут быть найдены численно, и дают разложение данного унитарного оператора в последовательность квантовых гейтов. Полученные в работе М.И. Зеликина и Л.В. Локуциевского количественные оценки на показатели гёльдеровости субримановых геодезических позволяют оценить эффективность численных алгоритмов в этой задаче. Также субриманова геометрия и особенности субримановой метрики тесно связаны с оптимальными решениями в задачах управления замкнутыми квантовыми системами.

6. Локальная управляемость и оптимальность. Раздел подготовлен Г.Г. Магарил-Ильяевым. Теория оптимального управления — важнейшая составляющая общей теории экстремума, а в прикладных вопросах — это одна из наиболее востребованных теорий. Для задачи оптимального управления вводится понятие траектории локального инфимума — функции, обобщающей понятие оптимальной траектории. Это функция, на которой достигает локальный минимум целевой функционал на замыкании множества допустимых траекторий, рассматриваемого как подмножество непрерывных функций. Траектория локального инфимума не является, вообще говоря, допустимой траекторией, но является, очевидно, равномерным пределом таковых. Оптимальная траектория может не существовать, но существования траектории локального инфимума вполне достаточно для приложений. Для траектории локального инфимума получены необходимые условия первого и второго порядков [24–27]. Если, в частности, траектория локального инфимума является оптимальной траекторией, то полученные условия содержат классические необходимые условия первого порядка (принцип максимума Понтрягина) и известные условия оптимальности второго порядка, а также другие соотношения, которые, как показывают примеры, дают дополнительную и весьма содержательную информацию об оптимальном процессе. В этом смысле полученные утверждения усиливают известные результаты.

Понятие управляемости управляемой системой является одним из важнейших в теории оптимального управления. Вводится понятие управляемости системой обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями общего вида и выводятся условия, гарантирующие управляемость не только исходной управляемой системы, но и близких к ней систем, причем для управляемости близких систем достаточно лишь непрерывности входящих в их определение отображений [28–31]. На практике близкие отображения возникают как следствие неточности задания исходных данных и/или как аппроксимация "сложных" отображений более простыми, которые, как правило, лишь непрерывны. С этой проблематикой тесно связаны вопросы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от его правой части и краевых условий. Доказано общее утверждение о непрерывной зависимости решения от правой части и краевых условий общего вида, из которого следует ряд известных результатов [32].

Следует сказать, что доказательство многих из указанных выше утверждений потребовало разработки новых математических средств, в частности теорем о существовании неявной функции не только у исходного отображения, но и у отображений, близких (в определенном смысле) к исходному [29]. Все перечисленные выше исследования проведены совместно с Е.Р. Аваковым.

7. О некоторых многомерных точных неравенствах колмогоровского типа. Раздел подготовлен К.Ю. Осипенко. Под неравенствами колмогоровского типа для производных на прямой традиционно понимают неравенства вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}, \tag{2}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$. В 1939 г. А.Н. Колмогоровым были найдены точные константы в (2) при $p = q = r = \infty$ в общем случае, т.е. при любых $n \geqslant 2$ и $0 < k < n$. Этот результат является наиболее ярким в данной проблематике. Результаты, аналогичные по своей завершенности колмогоровскому, получены на прямой лишь еще в трех случаях ($p = q = r = 2$ — Г. Харди, Дж. Литлвуд и Г. Полиа (1934), $p = q = r = 1$ — Э.Стейн (1957), $p = r = 2$, $q = \infty$ — Л.С. Тайков (1968)).

Если заменить функцию $x(\cdot)$ на ее преобразование Фурье, то при $r = 2$ и $q = \infty, 2$ удается получить (см. [32]) даже более общие неравенства, справедливые не только для всех $n > k$ ($n > k + d/2$ в случае $q = \infty$), но и для всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($2 < p \leqslant \infty$ в случае $q = 2$). Положим $\gamma = \frac{n-k-d/2}{n+d(1/2-1/p)}$, $\widetilde{q} = \frac{1}{1/2+\gamma(1/2-1/p)}$.

Теорема. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \geqslant 0$, $k+p > 1$, а $n > k+d/2$. Тогда имеет место точное неравенство:*

$$\|(-\Delta)^{k/2}x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant K_p(k,n)\|Fx(\cdot)\|^{\gamma}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\|(-\Delta)^{n/2}x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$K_p(k,n) = \frac{\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{2}}}{(2\pi)^{d\frac{2n-k-d/p}{2n+d(1-2/p)}}}\left(\frac{B\left(\widetilde{q}\gamma/2+1, \widetilde{q}(1-\gamma)/2\right)\pi^{d/2}}{(n-k-d/2)\Gamma(d/2)}\right)^{1/\widetilde{q}},$$

$Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $x(\cdot)$, а $B(\cdot,\cdot)$ — B-функция Эйлера.

Положим

$$\widetilde{\gamma} = \frac{n-k}{n+d(1/2-1/p)}, \quad q_1 = \frac{1}{\widetilde{\gamma}(1/2-1/p)},$$

$$\widetilde{K}_p(k,n) = \frac{\widetilde{\gamma}^{-\frac{\widetilde{\gamma}}{p}}(1-\widetilde{\gamma})^{-\frac{1-\widetilde{\gamma}}{2}}}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}}\left(\frac{B\left(q_1\widetilde{\gamma}/2+1, q_1(1-\widetilde{\gamma})/2\right)\pi^{d/2}}{(n-k)\Gamma(d/2)}\right)^{1/q_1}.$$

Теорема. *Пусть $k \geqslant 0$, $n > k$ и $2 < p \leqslant \infty$. Тогда имеет место точное неравенство:*

$$\|(-\Delta)^{k/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{K}_p(k,n)\|Fx(\cdot)\|^{\widetilde{\gamma}}_{L_p(\mathbb{R}^d)}\|(-\Delta)^{n/2}x(\cdot)\|^{1-\widetilde{\gamma}}_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

8. Сжатые измерения, восстановление ридж-функций, полиномиальные приближения. К.С. Рютиным получены [34,35] результаты по задаче целочисленных сжатых измерений, предложенной Л. Фукшански, Д. Ниделл и Б. Судаковым в 2019 г. По вектору Ax, где A — целочисленная $(m \times d)$-матрица (измерений), нужно восстановить вектор x, который предполагается *s-разреженным*, т.е. его носитель имеет мощность $s, s < d$. В работе С.В. Конягина и Б.Судакова [36] дана конструкция хорошей матрицы измерений с малыми по абсолютной величине элементами, т.е. $(m \times d)$-матрицы $A, m < d$, такой, что любой s-разреженный вектор $x \in \mathbb{Z}^d, s < d/2$ может быть однозначно восстановлен по вектору Ax. К.С. Рютин предложил алгоритм восстановления для этой матрицы и оценил его сложность (т.е. количество операций). Как следствие при больших N и любом $s \leqslant c_1 N/\log N$ существует булева $(c_2 s \log N) \times N$-матрица с эффективным однозначным восстановлением любых s-разреженных векторов из $\mathbb{Z}^N$.

Т.И. Зайцевой, Ю.В. Малыхиным и К.С. Рютиным (см. [37]) был предложен алгоритм восстановления ридж-функции ("плоской волны") по ее значениям в конечном числе точек, количество которых полиномиально зависит от размерности n, если порождающая функция φ принадлежит естественному классу аналитических функций. То есть мы восстанавливаем функцию $f(x) = \varphi(\langle a, x\rangle)$, где $a, x \in \mathbb{R}^n, |a| = 1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, а φ — аналитическая функция в окрестности отрезка $[-1, 1]$, по набору значений (данных с погрешностью) функции f в точках $x_1, \ldots, x_N$ из единичного шара $\mathbb{R}^n$, при этом a, φ нам неизвестны. Предложен оригинальный (вероятностный) алгоритм, сочетающий подходы из математической статистики и теории экстраполяции полиномов комплексной переменной, и оценена его точность. Данная работа существенно дополняет результаты ряда авторов по этой проблематике.

Ю.В. Малыхиным и К.С. Рютиным в [38] построены явные конструктивные полиномиальные приближения высокой точности локально-постоянных функций на объединении конечного числа дизъюнктных отрезков на прямой. Полученные оценки сверху точности приближения правильно отражают зависимость от геометрических характеристик семейства отрезков в двух наиболее интересных асимптотических режимах (когда все отрезки достаточно малы и когда некоторые из них оказываются очень близкими). Постановка относится к классической теории приближений полиномами и связана с именами Е.И. Золотарева, Н.И. Ахиезера, С.Н. Бернштейна, Г. Сеге, Г. Фабера, но полезна для изучения дискретных объектов (сложность булевых функций, тензоров). Особенно интересным представляется так называемый метод улучшения приближений, применяющийся в теории сложности и теории поперечников.

9. О задаче стабилизации некоторых систем гидродинамического типа посредством управления с обратной связью. Описанный подход изложен в работе А.В. Фурсикова [39], в которой также приведен подробный список публикаций по этой тематике. Главной гидродинамической системой, для которой здесь изучается задача стабилизации, является система уравнений Навье–Стокса вязкой несжимаемой жидкости, заданная в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Неизвестными функциями в ней являются скорость и давление жидкости $(v(t,x), p(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega)$, а также управление $u(t,x),\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$, заданное на границе области и совпадающее с граничным значением скорости жидкости. Заданными функциями являются начальное значение скорости $v_0(x) = v(t,x)|_{t=0}$, внешняя сила $f(x)$, $x \in \Omega$, и стационарное решение $\hat{v}(x)$, $x \in \Omega$, системы Навье–Стокса с той же правой частью $f(x)$.

Задача стабилизации состоит в построении такого управления $u(t,x)$, чтобы полученная с его помощью скорость жидкости $v(t,x)$ удовлетворяла условию $\|v(t,\cdot) - \hat{v}(\cdot)\| \to 0$ при $t \to \infty$, где $\|\cdot\|$ — соответствующая норма. Эта задача полностью решена при дополнительном условии, что величина $\|\hat{v} - v_0\|$ достаточно мала (т.е. при условии локальности). В нелокальном случае, т.е. когда это условие не выполнено, сделан лишь первый шаг к полному решению задачи, состоящий в следующем. Прежде всего по аналогии с постановкой проблемы миллениума о существовании гладкого решения трехмерной системы Навье–Стокса мы начинаем со случая, когда внешняя сила $f(x)$ равна нулю. Как известно из теории локальной стабилизации, в этом случае проблему можно свести к краевой задаче с периодическими краевыми условиями (т.е. заменить область Ω на трехмерный тор $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$) и управлением, заданным в правой части уравнения и сосредоточенным в некоторой специальной подобласти тора $\omega \subset \mathbb{T}^3$. С одной стороны, теорию нелокальной стабилизации необходимо строить в классе достаточно гладких функций, где решение краевой задачи единственно, а с другой — в качестве фазового пространства полезно взять пространство $(L_2(\mathbb{T}^3))^3$, в котором проще следить за динамикой течения. Чтобы удовлетворить обоим условиям, перейдем от задачи стабилизации для системы Навье–Стокса к аналогичной задаче для системы Гельмгольца, решение которой $w(t,x)$ связано со скоростью жидкости соотношением $w(t,x) = \operatorname{curl} v(t,x)$ (т.е. w — это вихрь скорости v). Известно, что нелинейный оператор в системе Гельмгольца имеет вид $B(w) = \Phi(w)w + B_\tau(w)$, где $\Phi(w)$ — функционал, а $B_\tau(w)$ и w ортогональны в пространстве $(L_2(\mathbb{T}^3))^3$. Отсюда легко выводится, что основные трудности построения стабилизации для системы Гельмгольца связаны с первым слагаемым нелинейного оператора $B(w)$. Поэтому принята следующая схема решения задачи стабилизации. На первом шаге оператор $B(w)$ заменяется на $\Phi(w)w$ и строится стабилизация для полученной системы. Эта задача успешно решена. На втором этапе следует вернуться к исходному оператору $B(w)$ и решить задачу. К сожалению, второй шаг пока сделан лишь для модельного примера, в котором вместо трехмерной системы Навье–Стокса взято уравнение Бюргерса.

Ограниченность объема статьи не позволила нам подробно рассказать о других интересных работах сотрудников кафедры, таких, как исследования чл.-корра. РАН В.Ю. Протасова по гармоническому анализу, устойчивости динамических систем, самоподобным множествам, профессора А.С. Демидова о явных численно реализуемых формулах для операторов Пуанкаре–Стеклова и решениях некоторых других уравнений математической физики, доцента А.С. Кочурова (совместно с А.С. Демидовым) о приближенном вычислении n-й производной по данным измерения функции и (совместно с профессором В.М. Тихомировым) об экстраполяции полиномов с действительными коэффициентами в комплексную плоскость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихомиров В.М.* Теория приближений. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 14. М.: ВИНИТИ, 1987. 103–260.
2. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову пересечения классов периодических функций и конечномерных множеств // Матем. заметки. 1981. **29**, № 5. 749–760.
3. *Vasil'eva A. A.* Kolmogorov widths of intersections of finite-dimensional balls // J. Compl. 2022. **72**. Article 101649.
4. *Васильева А.А.* Колмогоровские поперечники пересечения конечного семейства классов Соболева // Изв. РАН. Сер. матем. 2024. **88**, № 1. 21–46.
5. *Vasil'eva A.A.* Kolmogorov widths of an intersection of a family of balls in a mixed norm // J. Approxim. Theory. 2024. **301**. Article 106046.
6. *Галеев Э.М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, № 2. 418–430.
7. *Gorshkov A.V.* Associated Weber-Orr transform, Biot-Savart law and explicit form of the solution of 2D Stokes system in exterior of the disc // J. Math. Fluid Mech. 2019. **21**, N 41.
8. *Gorshkov A.V.* No-slip boundary condition for vorticity equation in 2D exterior domain // J. Math. Fluid Mech. 2023. **25**, N 47.
9. *Горшков А.В.* Специальное преобразование Вебера с ненулевым ядром // Матем. заметки. 2023. **114**, № 2. 212–228.
10. *Zapletin M., Samokhin A., Samokhina M., Grigoriev I.* Base on Phobos - Much safer exploration of Mars without the need for humans on the surface of the planet // Acta Astronaut. 2023. **204**. 920–925.
11. *Zapletin M., Samokhin A., Samokhina M., Grigoriev I.* The optimization of interplanetary flight to Phobos with a jet engine of combined low and high limited thrust // Adv. Astronaut. Sci. **170**. 213–227.
12. *Zapletin M.P., Zhakypov A.T.* The program for estimation of the earth remote sensing plans // Adv. Astronaut. Sci. 2020. **170**. 519–524.
13. *Заплетин М.П., Рябухин С.Н., Минченков М.А., Водянова В.В., Иванова М.А., Кокорев И.А., Беленчук С.И., Матаров В.М.* Дуальные товары. М.: Изд. дом “Научная библиотека”, 2023.
14. *Заплетин М.П., Гельвановский М.И., Водянова В.В., Минченков М.А.* Мировая экономика Системные сдвиги и проблемы глобальной безопасности XXI века. М.: Изд. центр РГГУ, 2019.
15. *Заплетин М.П., Рябухин С.Н., Минченков М.А., Водянова В.В.* Материально-залоговый принцип генерации инвестиционных средств // Науч. тр. Вольного экономического общества России. 2021. **231**, № 5. 227–237.
16. *Заплетин М.П., Рябухин С.Н., Минченков М.А., Водянова В.В.* Двухконтурная валютно-финансовая система как инструмент развития национальной экономики Российской Федерации и обеспечения ее суверенитета // Науч. тр. Вольного экономического общества России. 2020. **225**, № 5. 182–199.
17. *Заплетин М.П., Рябухин С.Н., Минченков М.А., Водянова В.В., Журавлев П.В.* Современные финансовые инструменты, обращаемые в национальных экономиках // Росс. эконом. журн. 2024. № 2. 46–71.
18. *Lokutsievskiy L., Zelikin M.* Derivatives of sub-Riemannian geodesics are L_p-Hölder continuous // ESAIM: COCV. 2023. **29**. 70.
19. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry. Cambridge University Press, 2019.
20. *Le Donne E., Leonardi G.P., Monti R., Vittone D.* Extremal curves in nilpotent Lie groups // Geom. Funct. Anal. 2013. **23**. 1371—1401.
21. *Barilari D., Chitour Y., Jean F., Prandi D., Sigalotti M.* On the regularity of abnormal minimizers for rank 2 sub-Riemannian structures // J. Math. Pures et App. 2020. **133**. 118–138.
22. *Hakavuori E., Le Donne E.* Non-minimality of corners in subriemannian geometry // Invent. math. 2016. **206**. N 3. 693–704.

23. *Belotto da Silva A., Figalli A., Parusinski A., Rifford L.* Strong Sard Conjecture and regularity of singular minimizing geodesics for analytic sub-Riemannian structures in dimension 3 // 2018. arXiv:1810.03347.
24. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* Локальный инфимум и семейство принципов максимума в оптимальном управлении // Матем. сб. 2020. **211**, № 6. 3–26.
25. *Avakov E.R., Magaril-Il'yaev G.G.* Local controllability and a family of maximum principles for a free time optimal control problem // SIAM J. Control Optim. 2020. **58**, N 6. 3–39.
26. *Avakov E.R., Magaril-Il'yaev G.G.* Necessary second-order conditions for a local infimum in an optimal control // SIAM J. Control Optim. 2022. **60**, № 2. 1018–1038.
27. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* Управляемость и необходимые условия второго порядка для траектории локального инфимума в оптимальном управлении // Тр. Матем. ин-та. РАН. 2023. **321**. 7–30.
28. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* Локальная управляемость и оптимальность // Матем. сб. 2021. **212**, № 7. 3–38.
29. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* Общая теорема о неявной функции для близких отображений // Тр. Матем. ин-та. РАН. 2021. **315**. 7–18.
30. *Avakov E.R., Magaril-Il'yaev G.G.* Local controllability and trajectories of geometric local infimum in optimal control problems // J. Math. Sci. 2023. **269**, № 2. 129–142.
31. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* Управляемость приближенно заданной управляемой системы // Матем. сб. 2024. **215**, № 4. 3–29.
32. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г.* О непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от правой части и краевых условий // Матем. заметки. 2023. **114**, № 1. 3–17.
33. *Osipenko K. Yu.* Inequalities for derivatives with the Fourier transform // Appl. Comp. Harm. Anal. 2021. **53**. 132–150.
34. *Рютин К.С.* Восстановление целочисленных разреженных векторов по линейным измерениям // Успехи матем. наук. 2019. **74**, №:6. 167–168.
35. *Рютин К.С.* Целочисленные матрицы измерения с малыми элементами, обеспечивающие восстановление векторов // Матем. заметки. 2020. **107**, № 2. 363–366.
36. *Konyagin S., Sudakov B.* An extremal problem for integer sparse recovery // Linear Algebra and Appl. 2020. **56**. № 1. 1—6.
37. *Malykhin Yu., Ryutin K., Zaitseva T.* Recovery of regular ridge functions on the ball // Constr. Approx. 2022. **56**. 687—708.
38. *Malykhin Yu.V., Ryutin K.S.* Polynomial approximation on disjoint segments and amplification of approximation // J. Approxim. Theory. 2024. **298**. March, 106010.
39. *Fursikov A.V.* On the Stabilization Problem by Feedback Control for Some Hydrodynamic Type Systems // Fluids Under Control / Ed. by T. Bodnar, G.P. Galdi, S. Necasova. Adv. Math. Fluid Mechanics. Birkhäuser, Cham. 2024. 1–61.

Поступила в редакцию
25.06.2024